Fez ELITE PRÉ-VESTIBULAR campinas Aprovou!

ELITE Resolve

IME 2015 Prova Objetiva

MATEMÁTICA, FÍSICA E QUIMICA

MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

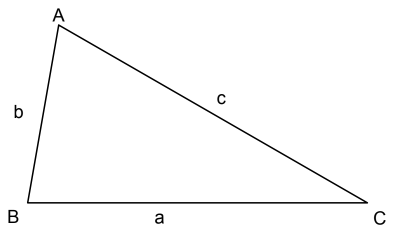
Os lados *a*, *b* e *c* de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos aos ângulos internos $\hat{A},\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}}{\cos\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}$$

a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) $2\sqrt{2}$
d) 3
e) 4

Resolução **Alternativa B**

Considere o triângulo ABC:



Como a, b e c estão em PA, podemos reescrever a medida dos lados como:

$$(a,b,c)=(b-r,b,b+r)$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABC:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Substituindo os valores de a e c:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}\Rightarrow\frac{b-r}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{b+r}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Aplicando a propriedade de proporção:

$$\frac{b-r}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{b+r}{\operatorname{sen}\hat{C}}\Leftrightarrow\frac{b-r+b+r}{\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{2b}{\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{C}=2\cdot\operatorname{sen}\hat{B}\quad(*)$$

Lembrando que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$. Assim, $\hat{B}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{C})$. E, também:

$$\operatorname{sen}\hat{B}=\operatorname{sen}\left(180^\circ-\left(\hat{A}+\hat{C}\right)\right)=\operatorname{sen}\left(\hat{A}+\hat{C}\right)$$

Substituindo na equação (*):

$$\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{C}=2\cdot\operatorname{sen}\hat{B}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{C}=2\cdot\operatorname{sen}\left(\hat{A}+\hat{C}\right)$$

Utilizando prostaférese no lado esquerdo da equação e expandindo o lado direito em arco duplo, temos:

$$2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)=2\cdot2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)\neq0$ e $\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)\neq0$ já que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são ângulos de um triângulo, segue que

$$2\cdot\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)=2\cdot2\cdot\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)=2\cdot\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)\Rightarrow\frac{\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}=2$$

Portanto, $\boxed{\frac{\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}=2}$.

QUESTÃO 02

Sejam *x* e *y* números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases}\log_x y^\pi+\log_y x^e=a\\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}}-\dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}}=b\end{cases}$$

O valor de $\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

a) 1
b) $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$
c) $\sqrt{\frac{a\cdot e}{b\cdot\pi}}$
d) $a-b$
e) $\sqrt{\frac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}}$

Resolução **Alternativa A**

Sendo *x* e *y* números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\begin{cases}\log_x y^\pi+\log_y x^e=a\\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}}-\dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}}=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\pi\cdot\log_x y+e\cdot\log_y x=a\\ \dfrac{1}{\pi^{-1}\cdot\log_y x}-\dfrac{1}{e^{-1}\cdot\log_x y}=b\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\pi\cdot\log_x y+e\cdot\log_y x=a\\ \dfrac{\pi}{\log_y x}-\dfrac{e}{\log_x y}=b\end{cases}$$

Lembrando que $\log_c d=\frac{\log_d d}{\log_d c}=\frac{1}{\log_d c}$, vem que:

$$\begin{cases}\pi\cdot\log_x y+e\cdot\log_y x=a\\ \pi\cdot\log_x y-e\cdot\log_y x=b\end{cases}$$

Fazendo a soma e a subtração das duas equações, temos:

$$\begin{cases}2\pi\cdot\log_x y=a+b\\ 2e\cdot\log_y x=a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y^{2\pi}=a+b\\ \log_y x^{2e}=a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^{a+b}=y^{2\pi}\\ x^{2e}=y^{a-b}\end{cases}$$

Multiplicando as duas equações membro a membro, segue que:

$$x^{a+b+2e}=y^{2\pi+a-b}\Leftrightarrow\boxed{\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}=1}$$

QUESTÃO 03

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x)=\ln\frac{8+3\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}3x}{8-4\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}2x\cos x}$$

Marque a opção verdadeira.

a) *f* não tem raízes reais
b) *f* é uma função ímpar
c) *f* é uma função par
d) $|f(x)|\le1$
e) *f* é sobrejetora

Resolução **Alternativa B**

Utilizando a relação de arco duplo ($\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$) e de arco triplo ($\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$) temos:

$$f(x) = \ln\frac{8 + 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{8 - 4\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2x \cos x} = \ln\frac{8 + 3\operatorname{sen} x - (3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x)}{8 - 4\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x \cos^2 x} =$$

$$= \ln\frac{8 + 4\operatorname{sen}^3 x}{8 - 4\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)} = \ln\frac{8 + 4\operatorname{sen}^3 x}{8 - 4\operatorname{sen}^3 x} = \ln\frac{2 + \operatorname{sen}^3 x}{2 - \operatorname{sen}^3 x}$$

Julgando as alternativas temos:

a) Falsa. Note que $f(0) = \ln\frac{2 + \operatorname{sen}^3 0}{2 - \operatorname{sen}^3 0} \Leftrightarrow f(0) = \ln\frac{2}{2} \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow$ 0 é raiz.

b) Verdadeira. Note que

$$f(-x) = \ln\frac{2 + \operatorname{sen}^3(-x)}{2 - \operatorname{sen}^3(-x)} \Leftrightarrow f(-x) = \ln\frac{2 - \operatorname{sen}^3(x)}{2 + \operatorname{sen}^3(x)} \Leftrightarrow$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2 + \operatorname{sen}^3(x)}{2 - \operatorname{sen}^3(x)}\right)^{-1} \Leftrightarrow f(-x) = -\ln\frac{2 + \operatorname{sen}^3(x)}{2 - \operatorname{sen}^3(x)} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

c) Falsa. Como visto na alternativa **b** a função é ímpar.

d) Falsa. Note que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{2 + \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 - \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \ln 3 > 1$, logo $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| > 1$.

e) Falsa. Note que para $\operatorname{sen}(x) = -1$ e $\operatorname{sen}(x) = 1$ teremos um mínimo e um máximo para $\frac{2 + \operatorname{sen}^3 x}{2 - \operatorname{sen}^3 x}$. Logo,

$$\frac{1}{3} \le \frac{2 + \operatorname{sen}^3 x}{2 - \operatorname{sen}^3 x} \le 3 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) \le \ln\frac{2 + \operatorname{sen}^3 x}{2 - \operatorname{sen}^3 x} \le \ln(3)$$

Logo, o conjunto imagem de $f(x)$ é diferente do contradomínio, o que mostra que $f(x)$ não é sobrejetora.

QUESTÃO 04

A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução **Alternativa A**

Consideremos a progressão aritmética:

$$\text{PA}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

sendo n o número de termos e r a sua razão.
De acordo com o enunciado, temos uma outra progressão aritmética

$$\text{PA}\,(a_1, r, n),$$

de razão 1. Assim, temos que:

$$\begin{cases} a_1 = r - 1 \\ n = r + 1 \end{cases}$$

Da soma dos n primeiros termos da primeira progressão, vem que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Leftrightarrow 2\cdot S_n = \left[a_1 + a_1 + (n-1)\cdot r\right]\cdot n$$

Substituindo as informações:

$$2\cdot 244 = \left[(r-1) + (r-1) + (r+1-1)\cdot r\right]\cdot(r+1) \Leftrightarrow$$

$$488 = \left[r^2 + 2r - 2\right]\cdot(r+1) \Leftrightarrow r^3 + 3r^2 - 490 = 0$$

Como os coeficientes são inteiros, podemos aplicar a pesquisa de raízes racionais, que nos diz que as possíveis raízes racionais desse polinômio são da forma p/q, onde p e q são números inteiros primos entre si, sendo p um divisor do termo independente (–490 nesse caso) e q um divisor do coeficiente líder (1 nesse caso).
Por inspeção, 7 é uma raiz desse polinômio. A partir disso, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

7	1	3	0	–490
	1	10	70	0

Portanto, o polinômio fica fatorado como:

$$(r-7)\cdot\left(r^2 + 10r + 70\right) = 0$$

Como $r^2 + 10r + 70 = 0$ é uma equação cujas raízes não são reais, pois seu discriminante é

$$\Delta = 10^2 - 4\cdot 1\cdot 70 = -180 < 0,$$

segue que a única raiz real do polinômio é $\boxed{r = 7}$.

QUESTÃO 05

Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

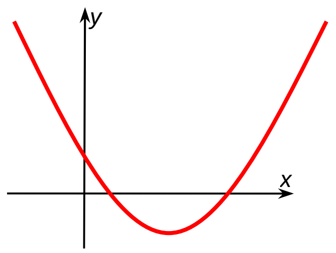
$$2x^2 - 12x + 10 \le 5y \le 10 - 2x$$

a) -3,2
b) -1,6
c) 0
d) 1,6
e) 3,2

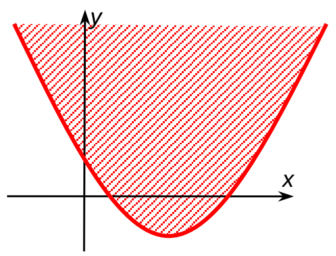
Resolução **Alternativa A**

Queremos encontrar o ponto mais alto e o mais baixo da região representado pela interseção das regiões $2x^2 - 12x + 10 \le 5y$ e $5y \le 10 - 2x$.

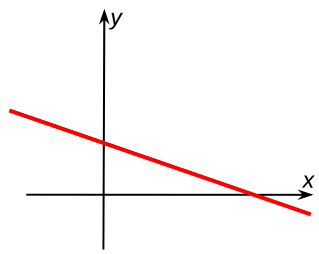
Para a primeira região temos como fronteira uma parábola $y = \frac{2x^2 - 12x + 10}{5}$. Suas raízes são 1 e 5 e seu vértice $\left(3, -\frac{8}{5}\right)$:



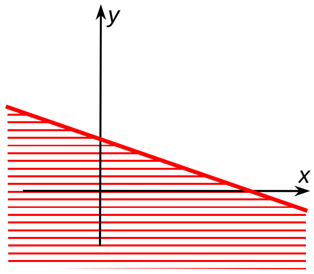
Testando a origem na inequação $2x^2 - 12x + 10 \le 5y$ chegamos em $10 \le 0$, que é falso, portanto a primeira região é:



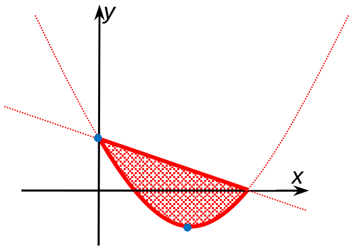
A segunda região terá como fronteira a reta $y = \frac{10 - 2x}{5}$, que é uma que corta os eixos nos pontos $(0,2)$ e $(5,0)$:



Testando a origem em $5y \le 10 - 2x$ chegamos em $0 \le 10$, que é verdade. Então obtemos a região



Interceptando as duas regiões obtemos a seguinte região



Onde os pontos marcados são exatamente os pontos de ordenadas máxima e mínima. Enquanto um deles é o vértice da parábola (já apresentado), o segundo será obtido pela interseção das fronteiras:

$$\frac{2x^2-12x+10}{5}=\frac{10-2x}{5} \Leftrightarrow 2x^2-10x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0$$

Estamos então interessados no ponto $x=0$, de ordenada $y=2$. Finalmente, o produto das ordenadas será:

$$\text{Produto}=2\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{-16}{5}=-3{,}2$$

QUESTÃO 06

Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26}-x^{25}-6x^{24}+5x^4-16x^3+3x^2$ pelo polinômio x^3-3x^2-x+3 ?.

a) x^2+x-2
b) $6x^2-4x+3$
c) $3x-9$
d) $6x^2-17x-3$
e) $6x+1$

Resolução **Alternativa D**

Fatorando x^3-3x^2-x+3, temos:

$$x^3-3x^2-x+3=x^2\cdot(x-3)-(x-3)=(x-3)\cdot(x^2-1)$$

Escrevendo a divisão, temos:

$$x^{26}-x^{25}-6x^{24}+5x^4-16x^3+3x^2=Q(x)\cdot(x-3)\cdot(x^2-1)+R(x)$$

Sabemos também que o grau de $R(x)$ deve ser menor que o grau do divisor. Logo, o grau de $R(x)$ deve ser menor que 3. Logo $R(x)$ é da forma:

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

Utilizando os valores das raízes do divisor(1, -1 e 3) na identidade da divisão, temos:

$$1^{26}-1^{25}-6\cdot1^{24}+5\cdot1^4-16\cdot1^3+3\cdot1^2=\cancel{Q(1)\cdot(1-3)\cdot(1^2-1)}+a+b+c \Leftrightarrow$$
$$a+b+c=-14 \quad \text{equação I}$$

$$(-1)^{26}-(-1)^{25}-6\cdot(-1)^{24}+5\cdot(-1)^4-16\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2=$$
$$=\cancel{Q(-1)\cdot(-1-3)\cdot((-1)^2-1)}+a-b+c \Leftrightarrow$$
$$a-b+c=20 \quad \text{equação II}$$

$$3\cdot3^{25}-3^{25}-2\cdot3^{25}+5\cdot3^4-16\cdot3^3+3\cdot3^2=$$
$$=\cancel{Q(3)\cdot(3-3)\cdot(3^2-1)}+9a+3b+c \Leftrightarrow$$
$$9a+3b+c=0 \quad \text{equação III}$$

Logo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a+b+c=-14 \\ a-b+c=20 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e substituindo, temos:

$$2b=-34 \Leftrightarrow b=-17$$

$$\begin{cases} a-17+c=-14 \\ 9a+3\cdot(-17)+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=3 \\ 9a+c=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ c=-3 \end{cases}$$

Logo, o resto da divisão será:

$$\boxed{R(x)=6x^2-17x-3}$$

QUESTÃO 07

Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n² por 11, sendo n um número natural?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Resolução **Alternativa D**

Perceba que os possíveis restos de um número N por 11 fazem parte do conjunto

$$R_{11}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

Usaremos a simbologia $a\equiv_{11}b$ (congruência módulo 11) para representar o resto **b** da divisão do número **a** por 11.
Agora, para determinarmos os possíveis restos da divisão de N^2 por 11, usaremos a propriedade de que $N\equiv_{11}r \Rightarrow N^2\equiv_{11}r^2$ para cada elemento do conjunto R_{11}. Assim, temos:

Resto de $N/11$	Resto de $N^2/11$
0	$0^2=0$
1	$1^2=1$
2	$2^2=4$
3	$3^2=9$
4	$4^2=16\equiv_{11}5$
5	$5^2=25\equiv_{11}3$
6	$6^2=36\equiv_{11}3$
7	$7^2=49\equiv_{11}5$
8	$8^2=64\equiv_{11}9$
9	$9^2=81\equiv_{11}4$
10	$10^2=100\equiv_{11}1$

Portanto, os possíveis restos são 0, 1, 3, 4, 5 e 9. Logo, são **6 restos diferentes**.

QUESTÃO 08

O número de soluções da equação $\cos(8x)=\text{sen}(2x)+\text{tg}^2(x)+\text{cotg}^2(x)$ no intervalo $[0,2\pi)$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4
e) 8

Resolução **Alternativa C**

Lembrando que para todo número real positivo k, vale que $k+\frac{1}{k}\geq 2$ (e a igualdade só ocorre se $k=1$), temos que:

$$\text{sen}(2x)+\text{tg}^2(x)+\text{cotg}^2(x)=\text{sen}(2x)+\text{tg}^2(x)+\frac{1}{\text{tg}^2(x)}\geq \text{sen}(2x)+2\geq 1$$

Mas, observe que $\cos(8x)\leq 1$, então a única solução possível acontece com $\cos(8x)=1$.

Isso só pode acontecer se $\text{sen}(2x)=-1$ e $\text{tg}^2(x)=1$ pelas desigualdades acima. Resolvendo a equação:

$$\text{sen}(2x)=-1 \Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$$

O que nos dá em $[0,2\pi)$ as soluções $x=\frac{3\pi}{4}$ e $x=\frac{7\pi}{4}$. Veja que essas soluções satisfazem as condições $\text{tg}^2(x)=1$ e $\cos(8x)=1$, sendo, portanto, soluções válidas.

Logo, o número de soluções no intervalo $[0,2\pi)$ é dois.

QUESTÃO 09

Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução **Alternativa A**

Inicialmente faremos uma operação elementar sobre as linhas da matriz dada com objetivo de transformar o elemento a_{31} em zero, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 0 & -x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

Dado que a operação elementar realizada não altera o valor do determinante da matriz, podemos calcular o determinante desta nova matriz utilizando o desenvolvimento por cofatores sobre a linha 3, assim:

$$\det A=(-1)^{3+2}\cdot(-x+4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x-1 & 2 \\ x & 1 & x-2 \end{vmatrix}=(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x-1 & 2 \\ x & 1 & x-2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-4)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}=(x-4)\cdot[(x-1)\cdot(x-2)-2]=$$

$$=(x-4)\cdot x\cdot(x-3)$$

Logo, os valores que tornam o determinante nulo são 0, 3 e 4.
Portanto, a soma dos módulos destes valores é 7.

QUESTÃO 10

Sejam Γ a circunferência que passa pelos pontos $(6,7)$, $(4,1)$ e $(8,5)$ e t a reta tangente à Γ, que passa por $(0,-1)$ e o ponto de tangência tem ordenada 5. A menor distância do ponto P $(-1,4)$ à reta t é:

a) $3\sqrt{2}$
b) 4
c) $2\sqrt{3}$
d) 3
e) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

Resolução **Alternativa E**

Tomemos o centro da circunferência $O(x_0,y_0)$. Sabemos que a distância do centro aos pontos que pertencem à circunferência são iguais, já que medem o valor do raio. Logo,

$$\begin{cases}(x_0-6)^2+(y_0-7)^2=(x_0-4)^2+(y_0-1)^2\\(x_0-6)^2+(y_0-7)^2=(x_0-8)^2+(y_0-5)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-12x_0+36-14y_0+49=-8x_0+16-2y_0+1\\-12x_0+36-14y_0+49=-16x_0+64-10y_0+25\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_0+3y_0=17\\x_0-y_0=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=5\\y_0=4\end{cases}$$

Logo, $O(5,4)$ e portanto o raio mede:

$$r=\sqrt{(5-6)^2+(4-7)^2}\Rightarrow r=\sqrt{10}$$

E a equação da circunferência é:

$$(x-5)^2+(y-4)^2=10$$

Sabemos também que os pontos de tangência cuja ordenada é 5, terão abscissas iguais a:

$$(x-5)^2+(5-4)^2=10\Leftrightarrow(x-5)^2=9\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=3\\x-5=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\x=2\end{cases},$$

Note que a reta que passa pelos pontos $(8,5)$ e $(0,-1)$ será:

$$y+1=\frac{3x}{4}\Leftrightarrow 3x-4y-1=0$$

E a distância dessa reta ao centro da circunferência será:

$$d_1=\frac{|3\cdot5-4\cdot4-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}\Leftrightarrow d=\frac{2}{5}<r$$

Logo, essa reta é secante à circunferência, portanto, não nos interessa.

Assumindo, então, que a reta tangente passa pelos pontos $(2,5)$ e $(0,-1)$ segue que a reta é:

$$y+1=3x\Leftrightarrow 3x-y-1=0$$

Note agora que a distância do centro da circunferência à reta obtida será:

$$d_2=\frac{|3\cdot5-\cdot4-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}\Leftrightarrow d=\sqrt{10}=r$$

Portanto, essa reta será tangente.

Calculando a menor distância entre o ponto $P(-1,4)$ até a reta $3x-y-1=0$, temos:

$$D=\frac{|3\cdot(-1)-1\cdot4-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}\Leftrightarrow\boxed{D=\frac{4\sqrt{10}}{5}}$$

QUESTÃO 11

O lugar geométrico no plano complexo de $w=z+\frac{1}{z}$, sendo z número complexo tal que $|z|=k$ e $k>1$, é um(a).

a) segmento de reta
b) circunferência
c) hipérbole
d) elipse
e) parábola

Resolução **Alternativa D**

Nessa resolução denotaremos $\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta$. Assim podemos escrever nosso complexo z como $z = k\cdot\text{cis}\,\theta$, com θ variando nos números reais. Então:

$$w = z + \frac{1}{z} = k\cdot\text{cis}\,\theta + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\text{cis}\,\theta}$$

Lembrando que $\dfrac{1}{\text{cis}\,\theta} = \overline{\text{cis}\,\theta} = \text{cis}(-\theta)$ temos:

$$w = k\cdot\text{cis}\,\theta + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\text{cis}\,\theta} = k\,\text{cis}\,\theta + \frac{1}{k}\text{cis}(-\theta).$$

Tomando parte real e parte imaginária e representando $w = x + yi$ temos:

$$\begin{cases} x = k\cos(\theta) + \dfrac{1}{k}\cos(-\theta) = k\cos(\theta) + \dfrac{1}{k}\cos(\theta) \\ y = k\,\text{sen}(\theta) + \dfrac{1}{k}\text{sen}(-\theta) = k\,\text{sen}(\theta) - \dfrac{1}{k}\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

Então chegamos na equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = \left(k + \dfrac{1}{k}\right)\cos(\theta) \\ y = \left(k - \dfrac{1}{k}\right)\text{sen}(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\left(k + \dfrac{1}{k}\right)} = \cos(\theta) \\ \dfrac{y}{\left(k - \dfrac{1}{k}\right)} = \text{sen}(\theta) \end{cases}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ chegamos em

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\left(k - \dfrac{1}{k}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(k + \dfrac{1}{k}\right)^2} = 1.$$

Então nosso lugar geométrico tem equação

$$\frac{x^2}{\left(k + \dfrac{1}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(k - \dfrac{1}{k}\right)^2} = 1$$

que é a equação de uma elipse.

QUESTÃO 12

O time de futebol "X" irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, "X" é o favorito. A probabilidade de "X" ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é 0,9. Quando "X" não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é 0,02. Em um determinado jogo de "X" contra "Y", o time "X" foi o vencedor. Qual a probabilidade de "X" ter sido o favorito nesse jogo?

a) 0,80 **b)** 0,98 **c)** 180/181
d) 179/181 **e)** 170/181

Resolução **Alternativa C**

Vamos denotar por F o evento em que "X" é o favorito e por X o evento em que "X" é o vencedor. Pelo enunciado podemos dizer que:

$P(F) = 0{,}8$ (e portanto $P(\overline{F}) = 0{,}2$),

$P(X \mid F) = 0{,}9$ e

$P(X \mid \overline{F}) = 0{,}02$.

A probabilidade pedida é de que "X" tenha sido favorito sabendo que ele vence, ou seja, $P(F \mid X)$. Aplicando o teorema de Bayes, temos:

$$P(F \mid X) = \frac{P(F \cap X)}{P(X)} = \frac{P(F)\cdot P(X \mid F)}{P(F)\cdot P(X \mid F) + P(\overline{F})\cdot P(X \mid \overline{F})}$$

Substituindo os valores temos:

$$P(F \mid X) = \frac{(0{,}8)\cdot(0{,}9)}{(0{,}8)\cdot(0{,}9) + (0{,}2)\cdot(0{,}02)} = \frac{0{,}72}{0{,}72 + 0{,}004} = \frac{0{,}72}{0{,}724} = \frac{720}{724}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(F \mid X) = \frac{180}{181}}.$$

QUESTÃO 13

Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

a) $\dfrac{ab}{2}$

b) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

c) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

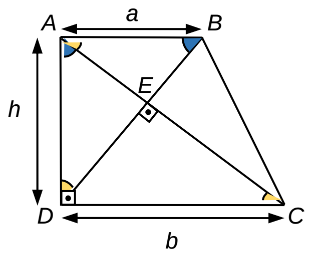
d) $\left(\dfrac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

e) $\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)a^2b}$

Resolução **Alternativa C**

SOLUÇÃO 1:

Segue na ilustração abaixo a situação descrita pelo enunciado.



Para que calculemos a área do trapézio, devemos encontrar o valor de h em função de a e b já que:

$$S = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Note que $\Delta ADC \sim \Delta BAD$. Logo,

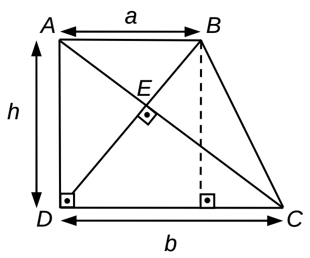
$$A\hat{B}D \cong D\hat{A}C \Rightarrow tg(A\hat{B}D) = tg(D\hat{A}C) \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{b}{h} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

Deste modo, temos que a área do trapézio é:

$$S = \frac{(a+b)\cdot h}{2} \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{(a+b)}{2}\cdot\sqrt{ab}}$$

SOLUÇÃO 2:

Segue na ilustração abaixo a situação descrita pelo enunciado.



Para que calculemos a área do trapézio, devemos encontrar o valor de h em função de a e b já que:

$$S = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Sabe-se também, pelo teorema de Pitágoras que:

$$\begin{cases} a^2 = (AE)^2 + (BE)^2 \\ b^2 = (DE)^2 + (CE)^2 \\ h^2 = (AE)^2 + (DE)^2 \\ (BC)^2 = (BE)^2 + (CE)^2 \\ (BC)^2 = h^2 + (b-a)^2 \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, temos:

$$a^2 + b^2 = (AE)^2 + (DE)^2 + (BE)^2 + (CE)^2$$

Substituindo a terceira, quarta e quinta equações na equação acima, temos:

$$a^2+b^2=\left[(AE)^2+(DE)^2\right]+\left[(BE)^2+(CE)^2\right]\Rightarrow$$
$$a^2+b^2=h^2+(BC)^2\Rightarrow a^2+b^2=h^2+h^2+(b-a)^2\Rightarrow$$
$$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}=2h^2+\cancel{a^2}-2ab+\cancel{b^2}\Rightarrow 2h^2=2ab\Rightarrow$$
$$h^2=ab\Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

Deste modo, temos que a área do trapézio é:

$$S=\frac{(a+b)\cdot h}{2}\Leftrightarrow \boxed{S=\frac{(a+b)}{2}\cdot\sqrt{ab}}$$

QUESTÃO 14

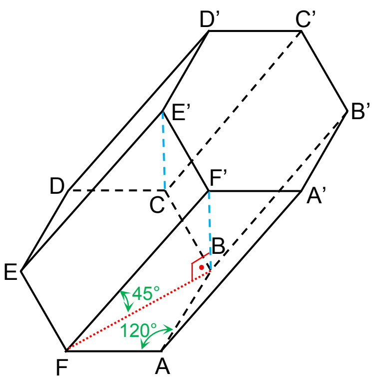
Em um prisma oblíquo *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*, cuja base *ABCDEF* é um hexágono regular de lado a , a face lateral *EFF'E'* está inclinada 45º em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta *F'E'* sobre a base *ABCDEF* coincide com a aresta *BC*. O volume do prisma é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$ **b)** $\frac{9}{4}a^3$ **c)** $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$ **e)** $\frac{5}{2}a^3$

Resolução **Alternativa D**

Observe a figura abaixo que representa o sólido descrito.



No triângulo *AFB* aplicamos a lei dos cossenos para determinar o valor do segmento $\overline{BF}$:

$$\left(\overline{BF}\right)^2=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\cos 120°=3a^2\Rightarrow \overline{BF}=a\sqrt{3}$$

Observe agora que o triângulo BFF' é retângulo isósceles, pois o ponto B é a projeção ortogonal do ponto F' e o ângulo $B\hat{F}F'$ tem a mesma medida que a inclinação da face $EFF'E'$ com o plano da base. Isto é, $B\hat{F}F'=45°$. Assim, a altura do prisma é $\overline{BF'}=\overline{BF}=a\sqrt{3}$. Portanto, o volume do prisma é o produto da área da base pela altura, isto é:

$$V=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{3}\Leftrightarrow\boxed{V=\frac{9}{2}\cdot a^3}\ .$$

QUESTÃO 15

Seja um tetraedro regular *ABCD* de aresta *a* e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro *BCD*, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

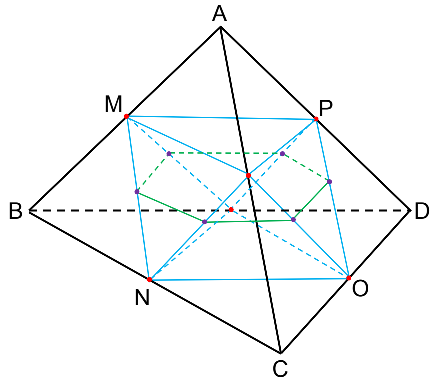
c) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

Resolução **Alternativa C**

Seja o tetraedro *ABCD* e *M*, *N*, *O*, *P*, *Q* e *R* os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente, os quais determinam o octaedro inscrito no tetraedro.



Note que os tetraedros *CNOQ*, *DORP*, *BNRM* e *MQPA* também são tetraedros regulares e tem metade da altura *h* do tetraedro *ABDC*. Observe, por exemplo, o tetraedro *CNOQ*:

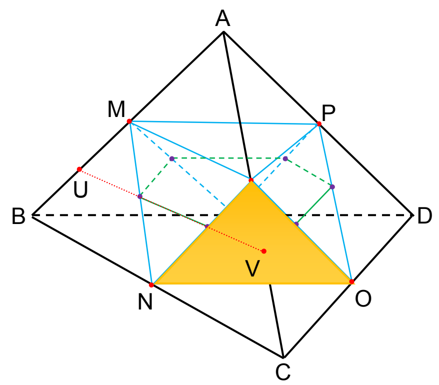
$$\overline{NC}=\overline{CO}=\frac{a}{2}\text{ (}N\text{ e }O\text{ são pontos médios),}$$

$$\overline{NO}=\overline{QN}=\overline{QO}=\frac{a}{2}\text{ (base média dos triângulos }BDC\text{, }ABC\text{ e }ACD\text{)}$$

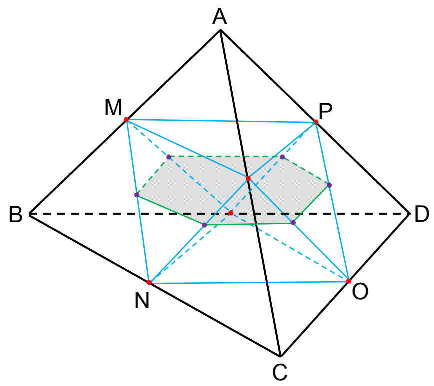
Analogamente, temos que os demais tetraedros citados são regulares.

Assim, o triângulo *NOQ*, por exemplo, é equilátero com lado de medida $\frac{a}{2}$ e, consequentemente, o segmento determinado pela intersecção do plano traçado $\left(\text{a altura }\frac{h}{4}\text{ em relação à base}\right)$ com esse triângulo é uma base média do triângulo *NOQ*, ou seja, tem medida $\frac{a}{4}$. Analogamente, todos os segmentos determinados pelo plano traçado com o octaedro inscrito medem $\frac{a}{4}$ e observe que este plano determinará seis segmentos com essa medida $\frac{a}{4}$.

Note ainda que o hexágono determinado é regular pois tem os lados com mesma medida, $\frac{a}{4}$, e os ângulos internos iguais a 120° *(veja que o ângulo externo referente ao vértice do hexágono determinado pelas intersecções dos segmentos* $\overline{MN}$ *e* $\overline{UV}$ *mede 60°)*.



Finalmente, a área desejada é a área de um hexágono regular com lado $\frac{a}{4}$.

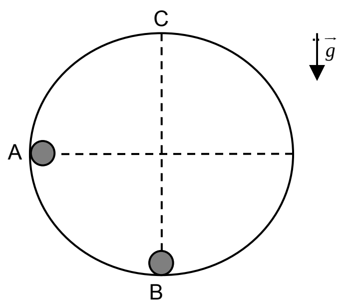


ou seja,

$$A = 6\cdot\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{32}\cdot a^2}.$$

FÍSICA

QUESTÃO 16



Um corpo puntiforme de massa m_A parte do ponto *A*, percorrendo a rampa circular representada na figura acima, sem atrito, colide com outro corpo puntiforme de massa m_B, que se encontrava inicialmente em repouso no ponto *B*. Sabendo que este choque é perfeitamente inelástico e que o corpo resultante deste choque atinge o ponto *C*, ponto mais alto da rampa, com a menor velocidade possível mantendo o contato com a rampa, a velocidade inicial do corpo no ponto *A*, em m/s, é:

Dados:

- raio da rampa circular: 2m;
- aceleração da gravidade *g*: 10m/s²;
- massa m_A: 1kg;
- massa m_B: 1kg.

a) 10
b) 20
c) $4\sqrt{15}$
d) $10\sqrt{5}$
e) $8\sqrt{5}$

Resolução **Sem alternativa**

Dos dados do problema, podemos adotar: $m_A = m_B = m$

Entre o ponto A e o ponto B:
Sendo v_A é a velocidade do corpo A imediatamente antes da colisão, no ponto B, podemos nos valer da conservação de energia para o corpo que parte do ponto A para determinarmos sua velocidade inicial $(v_{A,inicial})$:

$$\frac{m\cdot v_A{}^2}{2} = m\cdot g\cdot R + \frac{m\cdot v_{A,inicial}^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{v_A{}^2}{2} = g\cdot R + \frac{v_{A,inicial}^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_{A,inicial}^2 = v_A{}^2 - 2\cdot g\cdot R \qquad (1)$$

No ponto B:
Considerando que no choque inelástico os corpos se unem após a colisão, da conservação da quantidade de movimento temos, para o ponto B:

$$\vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{Q}'_{AB} \Rightarrow m\cdot v_A = 2\cdot m\cdot v_{AB} \Rightarrow v_A = 2\cdot v_{AB} \qquad (2)$$

Onde v_{AB} é a velocidade dos dois corpos unidos imediatamente após a colisão.

Entre o ponto B e o ponto C:
Sendo E_C a energia cinética e E_P a energia potencial, da conservação de energia podemos encontrar a velocidade em B, após a colisão.

$$E_{CB} + E_{PB} = 2E_{CC} + E_{PC} \Rightarrow$$

$$\frac{2m\cdot v_{AB}{}^2}{2} = \frac{2m\cdot v_C^2}{2} + 2m\cdot g\cdot h_C \Rightarrow \frac{v_{AB}{}^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} + g\cdot h_C$$

Como $h_C = 2\cdot R$

$$v_{AB}{}^2 = v_C^2 + 2\cdot g\cdot(2\cdot R) \qquad (3)$$

No ponto C:
Na condição de velocidade mínima para que o corpo não perca contato com a pista no ponto mais alto da trajetória a força de contato entre o corpo e a pista é nula, sendo assim, a única força que age sobre o corpo é o seu peso, sendo ele o responsável pelo movimento circular nesse ponto da trajetória, de modo que o peso é a resultante centrípeta:

$$R_{cp} = 2m\cdot g \Rightarrow \frac{2m\cdot v_C^2}{R} = 2m\cdot g \Rightarrow v_C^2 = g\cdot R \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$v_{AB}{}^2 = g\cdot R + 2\cdot g\cdot(2\cdot R) \Rightarrow v_{AB}{}^2 = 5\cdot g\cdot R \Rightarrow v_{AB} = \sqrt{5\cdot g\cdot R}$$

Substituindo esse resultado em (2):

$$v_A = 2\cdot\sqrt{5\cdot g\cdot R}$$

Substituindo esse resultado em (1):

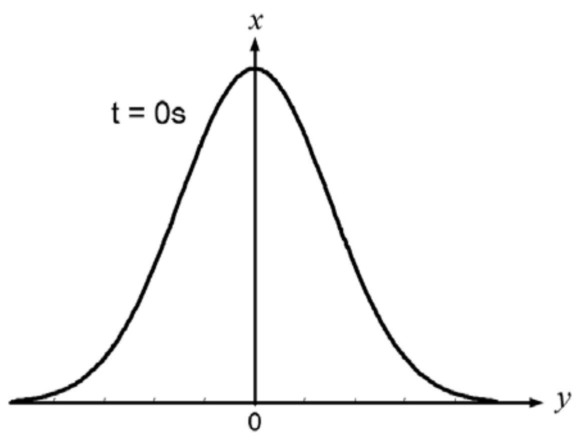
$$v_{A,inicial}^2 = \left(2\cdot\sqrt{5\cdot g\cdot R}\right)^2 - 2\cdot g\cdot R \Rightarrow$$

$$v_{A,inicial}^2 = 18\cdot g\cdot R \Rightarrow v_{A,inicial} = \sqrt{18\cdot 10\cdot 2} \Rightarrow$$

$$v_{A,inicial} = 6\sqrt{10}\ \text{m/s}$$

Portanto não há alternativa correta.

QUESTÃO 17



A figura acima mostra uma onda transversal na forma de um pulso ondulatório em uma corda esticada. A onda está se propagando no sentido positivo do eixo *x* com velocidade igual a 0,5 m/s. Se o deslocamento *y*, em metros, para uma coordenada *x*, em metros, no instante *t*=0 é dado por

$$y(x)=\frac{1}{x^2+4}$$

O deslocamento *y*, em centímetros, para *x* = 3 metros e *t* = 2 segundos é

a) 5,50
b) 6,25
c) 8,50
d) 12,50
e) 15,25

Resolução **Alternativa D***

Embora o texto diga que o pulso se propaga no sentido positivo do eixo x, a figura do enunciado traz um pulso que se propaga no eixo *y*. O conflito entre as informações da figura e do texto confundem os vestibulandos e impedem uma interpretação inequívoca acerca da situação descrita.

Desconsiderando as informações dadas na figura, levando em conta apenas o texto, teríamos os seguintes resultados:

Se a equação que define o pulso é dada por $y(x)=\frac{1}{x^2+4}$ e o pulso viaja com velocidade *v* para o sentido positivo do eixo *x* então a equação do pulso dependente de *x* e de *t* seria dada por $y(x,t)=\frac{1}{(x-v\cdot t)^2+4}$.

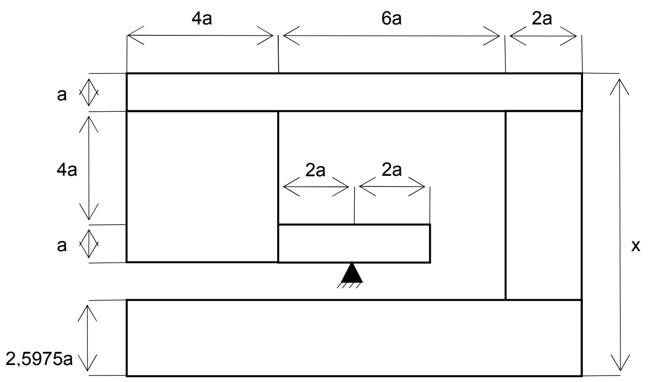
Substituindo os dados do enunciado:

$$y(x,t)=\frac{1}{(x-v\cdot t)^2+4}\ \Rightarrow$$

$$y(3,2)=\frac{1}{(3-0,5\cdot 2)^2+4}\ \Rightarrow\ y(3,2)=12,5\text{ cm}$$

Embora haja uma resolução possível é necessário que, para obter a resposta desejada pela banca, o vestibulando tome como falsas parte das informações trazidas pelo enunciado. Propomos a anulação dessa questão.

QUESTÃO 18

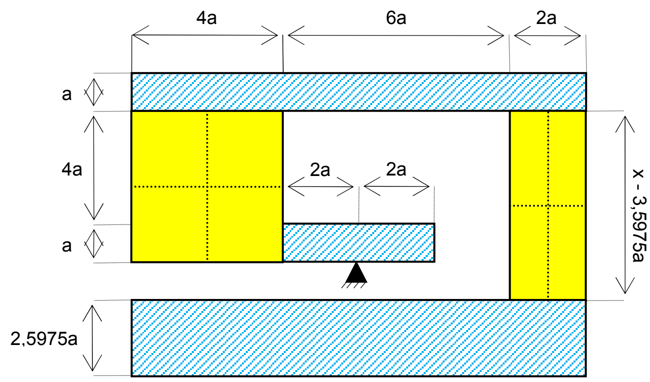


Uma chapa rígida e homogênea encontra-se em equilíbrio. Com base nas dimensões apresentadas na figura, o valor da razão *x/a* é:

a) 10,5975
b) 11,5975
c) 12,4025
d) 12,5975
e) 13,5975

Resolução **Alternativa B**

O corpo a ser estudado, embora tenha uma forma que dificultaria o cálculo da posição de seu centro de massa, apresenta alguns recortes simétricos em sua constituição. As áreas hachuradas são simétricas em relação à reta vertical que passa pelo ponto de apoio, por este motivo não precisam ser consideradas quando se faz a somatória dos torques.



As áreas com preenchimento sólido/amarelo apresentam seus centros de massa sobre o cruzamento das linhas tracejadas que os seccionam. Apenas os pesos dessas partes, não simétricas em relação ao eixo vertical do ponto de apoio, serão importantes no cálculo dos torques.

Se toda a chapa possui densidade superficial de massa uniforme *d*, então as massas de cada uma das partes será:

$$M_{Esquerda}=d\cdot(4a\cdot 5a)$$

$$M_{Direita}=d\cdot(2a\cdot(x-3,5975a))$$

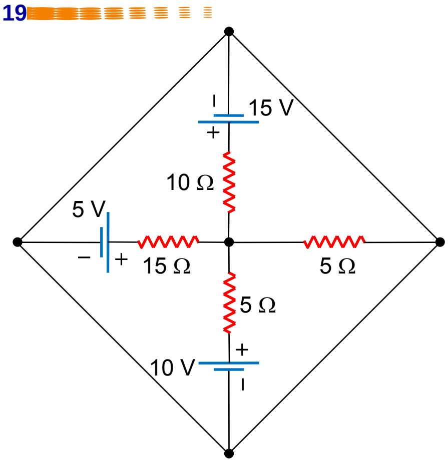
A somatória dos torques em torno do ponto de apoio fica:

$$\tau_{Esqueda}-\tau_{Direita}=0\ \Rightarrow\ M_{Esquerda}\cdot g\cdot L_{Esquerda}-M_{Direita}\cdot g\cdot L_{Direita}=0\ \Rightarrow$$

$$d\cdot(20a^2)\cdot 4a-d\cdot 2a\cdot(x-3,5975a)\cdot 5a=0\ \Rightarrow\ x=11,5975a\ \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a}=11,5975}$$

QUESTÃO 19



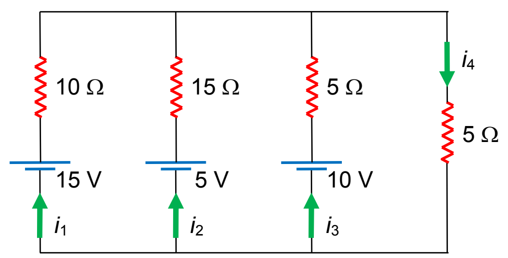
A figura acima mostra um circuito elétrico composto por resistências e fontes de tensão. Diante do exposto, a potência dissipada, em W, no resistor de 10 Ω do circuito é

a) 3,42
b) 6,78
c) 9,61
d) 12,05
e) 22,35

Resolução **Alternativa B**

Red

esenhando o circuito com as denominações das correntes em cada um dos ramos do circuito indicadas na figura, temos:



Medindo a diferença de potencial entre os extremos superior e inferior em cada trecho, temos:

$$15-10\cdot i_1 = 5-15\cdot i_2 = 10-5\cdot i_3 = 5\cdot i_4 \Leftrightarrow$$
$$3-2\cdot i_1 = 1-3\cdot i_2 = 2-i_3 = i_4 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{2i_1-2}{3} \\ i_3 = 2i_1 - 1 \\ i_4 = 3-2i_1 \end{cases}$$

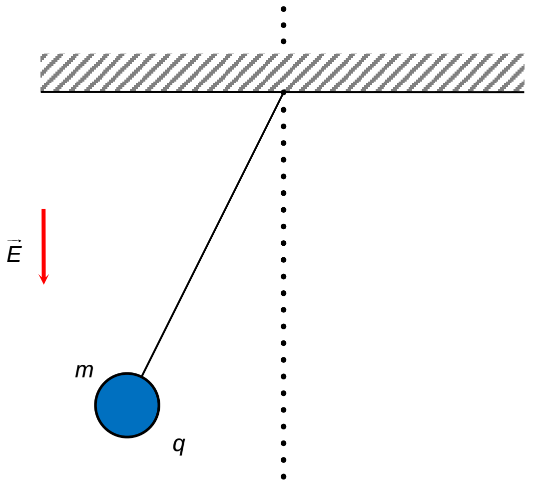
Sendo que $i_4 = i_1 + i_2 + i_3$, assim:

$$3-2i_1 = i_1 + \frac{2i_1-2}{3} + 2i_1 - 1 \Leftrightarrow i_1 = \frac{14}{17}\text{ A}$$

Portanto, a potência dissipada no resistor de 10 Ω é:

$$P_1 = R_1\cdot i_1^2 = 10\cdot\left(\frac{14}{17}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{P_1 = \frac{1960}{289} \approx 6{,}78\text{ W}}$$

QUESTÃO 20



A figura acima apresenta um pêndulo simples constituído por um corpo de massa 4 g e carga +50 μC e um fio inextensível de 1 m. Esse sistema se encontra sob a ação de um campo elétrico $\vec{E}$ de 128 kN/C, indicado na figura.

Considerando que o pêndulo oscile com amplitude pequena e que o campo gravitacional seja desprezível, o período de oscilação, em segundos, é

a) $\frac{\pi}{20}$

b) $\frac{\pi}{10}$

c) $\frac{\pi}{5}$

d) $\frac{2\pi}{5}$

e) $\frac{4\pi}{5}$

Resolução **Alternativa A**

O período de pequenas oscilações de um pêndulo simples sob a ação de um campo vetorial de força $\vec{F}$ é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\cdot L}{F}}$$

Como o campo gravitacional é desprezível, então $\vec{F}$ é devida unicamente ao campo elétrico, assim:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\cdot L}{q\cdot E}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-3}\cdot 1}{50\cdot 10^{-6}\cdot 128\cdot 10^{3}}} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{20}\text{ s}}$$

QUESTÃO 21

Uma partícula eletricamente carregada está presa a um carrinho que se move com velocidade de módulo constante por uma trajetória no plano XY definida pela parábola:

$$y = x^2 - 9x + 3$$

Sabe-se que, em XY, um campo magnético uniforme paralelo ao vetor (3*B*, *B*) provoca força sobre a partícula. O ponto onde a partícula é submetida ao maior módulo de força magnética é

a) (-6, 93) **b)** (-3, 39) **c)** (1, -5) **d)** (2, -2) **e)** (3, -15)

Resolução **Alternativa E**

Para que a força magnética seja máxima, o ângulo entre a velocidade e o vetor campo magnético deve ser de $\theta = 90°$, pois:

$$F_{mág} = q\cdot v\cdot B\cdot \operatorname{sen}\theta$$

Temos então que encontrar o ponto da curva dada que seja perpendicular ao vetor campo magnético.

Encontremos o coeficiente angular de uma reta paralela ao vetor campo magnético:

$$m_B = \frac{B_y}{B_x} = \frac{1}{3}$$

Agora, derivando a equação dada, obtemos o coeficiente da reta tangente à parábola em cada ponto:

$$m_P = \frac{dy}{dx} = 2x - 9$$

Para que a força seja máxima, temos que a direção do campo magnético deve ser perpendicular à reta tangente à parábola, assim:

$$m_P = -\frac{1}{m_B}$$

Resolvendo esta equação:

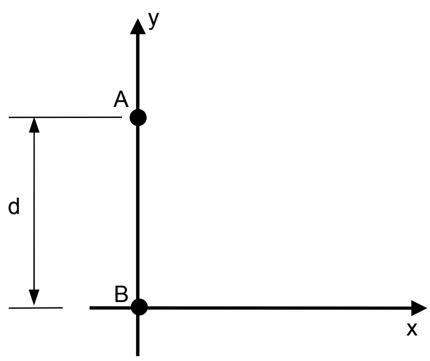
$$2x - 9 = -3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Substituindo na equação da parábola:

$$y = 3^2 - 9\cdot 3 + 3 \Rightarrow \boxed{y = -15}$$

Portanto, o ponto será (3, -15).

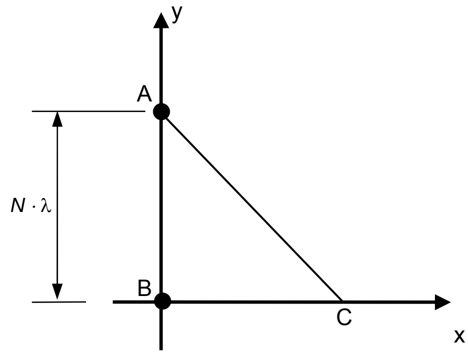
QUESTÃO 22



Duas fontes puntiformes idênticas estão localizadas nos pontos *A* e *B*. As fontes emitem ondas coerentes e em fase entre si. Se a distância *d* entre as fontes é igual a um múltiplo inteiro positivo *N* do comprimento de onda, o número de máximos de interferência que podem ser observados no eixo *x* à direita do ponto B é:

a) $N-1$ **b)** N **c)** $2N-1$ **d)** $2N$ **e)** infinitos

Resolução **Alternativa A**



Do enunciado temos que a distância entre A e B é $N\cdot\lambda$. Logo, temos que:

$$(AC)^2 = \sqrt{(N\cdot\lambda)^2 + x_C^{\,2}}$$

Logo a diferença de caminho entre as ondas será dada por:

$$\Delta s = (AC)^2 = \sqrt{(N\cdot\lambda)^2 + x_C^{\,2}} - x_C$$

Como estamos interessados em pontos de máximo, podemos dizer que:

$\Delta s = \sqrt{(N\cdot\lambda)^2 + x_C^{\,2}} - x_C = k\cdot\lambda$, onde k é um inteiro positivo.

Dessa expressão segue:

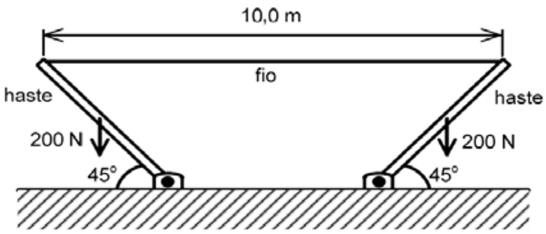
$$\sqrt{(N\cdot\lambda)^2 + x_C^{\,2}} - x_C = k\cdot\lambda \Rightarrow (N\cdot\lambda)^2 + x_C^{\,2} = (k\cdot\lambda + x_C)^2 \Rightarrow$$
$$(N\cdot\lambda)^2 + x_C^{\,2} = (k\cdot\lambda)^2 + 2\cdot k\cdot\lambda\cdot x_C + x_C^{\,2} \Rightarrow$$
$$(N\cdot\lambda)^2 = (k\cdot\lambda)^2 + 2\cdot k\cdot\lambda\cdot x_C \Rightarrow x_C = \frac{\lambda^2\cdot(N^2-k^2)}{2\cdot k\cdot\lambda}$$
$$\Rightarrow x_C = \frac{\lambda\cdot(N-k)\cdot(N+k)}{2\cdot k}$$

O valor de x_C deve ser positivo, portanto para que isso ocorra a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$(N-k) > 0 \Leftrightarrow k < N$$

Note que tanto $(N+k)$, quanto $2\cdot k$ são positivos, logo basta $(N-k)>0$. Sendo assim o maior valor possível de k é $N-1$.

QUESTÃO 23



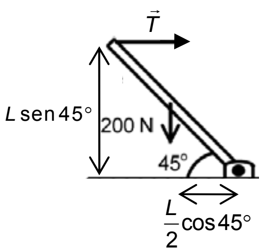
Um varal de roupas é constituído por um fio de comprimento 10,0 m e massa 2,5 kg, suspenso nas extremidades por duas hastes uniformes de 200 N de peso, com articulação nas bases, inclinadas de 45º em relação às bases e de iguais comprimentos. Um vento forte faz com que o fio vibre com pequena amplitude em seu quinto harmônico, sem alterar a posição das hastes. A frequência, em Hz, neste fio é:

Observação:
- A vibração no fio não provoca vibração nas hastes.

a) 3
b) 5
c) 10
d) 20
e) 80

Resolução **Alternativa B**

Pela soma dos momentos totais em qualquer haste, pode-se encontrar a tração no fio. Observe a figura para auxiliar a condição de momento total nulo nas articulações das hastes:



$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P\cdot\frac{L}{2}\cos 45° = T\cdot L\,\text{sen}\,45° \Rightarrow$$

$$200\cdot\frac{1}{2} = T \Rightarrow T = 100\ \text{N}$$

Pela equação de Taylor:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Em que T é a tensão no fio, μ a densidade linear e v a velocidade da onda na corda.
Para a condição de quinto harmônico, sendo L o comprimento do fio, temos:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

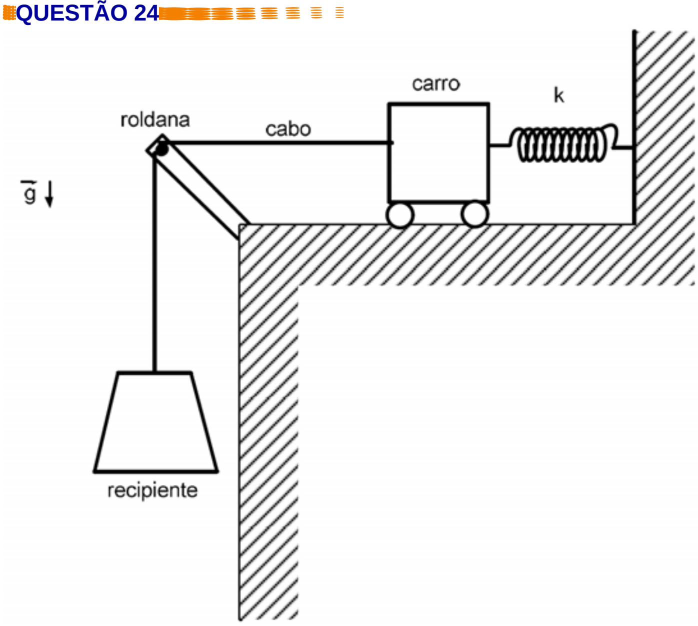
Substituindo esta equação na relação fundamental da ondulatória ($v=\lambda f$) e esta na equação de Taylor, obtemos:

$$\frac{2L}{n}\cdot f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Substituindo os dados e isolando f, temos:

$$\frac{2\cdot 10}{5}\cdot f = \sqrt{\frac{100}{2{,}5/10}} \Rightarrow \boxed{f = 5\ \text{Hz}}$$

QUESTÃO 24

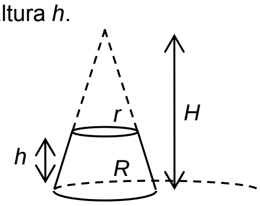


A figura acima mostra um conjunto massa-mola conectado a uma roldana por meio de um cabo. Na extremidade do cabo há um recipiente na forma de um tronco de cone de 10 cm x 20 cm x 30 cm de dimensões (diâmetro da base superior x diâmetro da base inferior x altura) e com peso desprezível. Não há atrito entre o cabo e a roldana. No estado inicial, o carro encontra-se em uma posição tal que o alongamento na mola é nulo e o cabo não se encontra tracionado. A partir de um instante, o recipiente começa a ser completado lentamente com um fluido com massa específica de 3000 kg/m³. Sabendo que o coeficiente de rigidez da mola é 3300 N/m e a aceleração da gravidade é 10 m/s², o alongamento da mola no instante em que o recipiente se encontrar totalmente cheio, em cm, é igual a:

a) 0,5
b) 1,5
c) 5,0
d) 10,0
e) 15,0

Resolução **Alternativa C**

Observe a figura do tronco de cone abaixo. Como o raio da base maior é o dobro da base menor, então, por semelhança de triângulos, a altura H é o dobro da altura h.



Sendo R = 0,1 m, r = 0,05 m, h = 0,3 m e H = 0,6 m, podemos calcular o volume do tronco de cone:

$$V = \frac{1}{3}AH - \frac{1}{3}ah \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\pi R^2 H - \pi r^2 h\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}6 - \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}3\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{7 \cdot 10^{-3} \cdot \pi}{4}\ \text{m}^3$$

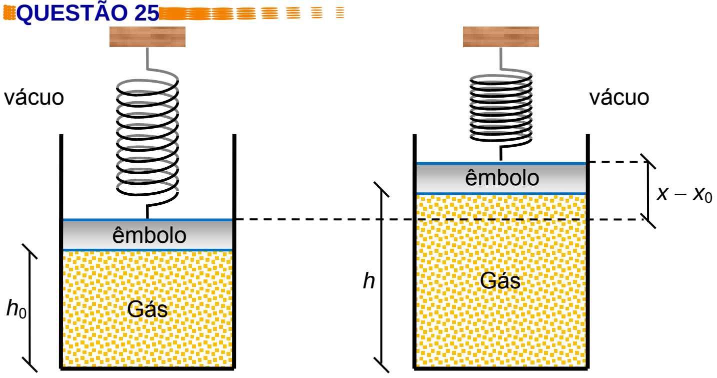
O peso do liquido deve ser igual à força elástica na mola, não dependendo portanto da massa do carro. Assim:

$$P = kx \Rightarrow V\rho g = kx \Rightarrow x = \frac{V\rho g}{k}$$

Substituindo os dados:

$$x = \frac{7 \cdot 10^{-3} \cdot \pi}{4} \cdot \frac{3000 \cdot 10}{3300} \Rightarrow x \approx 0{,}05\ \text{m} \Rightarrow \boxed{x \approx 5\ \text{cm}}$$

QUESTÃO 25



Situação 1 Situação 2

A figura acima mostra um sistema posicionado no vácuo formado por um recipiente contendo um gás ideal de massa molecular M e calor específico c em duas situações distintas. Esse recipiente é fechado por um êmbolo preso a uma mola de constante elástica k, ambos de massa desprezível. Inicialmente (Situação 1), o sistema encontra-se em uma temperatura T_0, o êmbolo está a uma altura h_0 em relação à base do recipiente e a mola comprimida de x_0 em relação ao seu comprimento relaxado.

Se uma quantidade de calor Q for fornecida ao gás (Situação 2), fazendo com que o êmbolo se desloque para uma altura h e a mola passe a estar comprimida em x, a grandeza que varia linearmente com Q é:

a) $x + h$
b) $x - h$
c) $(x + h)^2$
d) $(x - h)^2$
e) xh

Resolução **Alternativa E**

Na situação 1, o gás está submetido a uma pressão p_0, e a mola está comprimida de x_0. Na situação 2, o gás está submetido a uma pressão p, e a mola está comprimida de x. Igualando a força que o gás exerce sobre o êmbolo com a força exercida pela mola em cada situação, sendo A a área do êmbolo, temos que:

$$\begin{cases} p_0 \cdot A = k \cdot x_0 \\ p \cdot A = k \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{x}{x_0}$$

Já pela Lei Geral dos Gases Perfeitos:

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p \cdot V}{T} \Leftrightarrow \frac{p_0 \cdot (A \cdot h_0)}{T_0} = \frac{p \cdot (A \cdot h)}{T} \Leftrightarrow T = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{h}{h_0} \cdot T_0$$

Substituindo a razão entre as pressões, vem que:

$$T = \frac{x}{x_0} \cdot \frac{h}{h_0} \cdot T_0$$

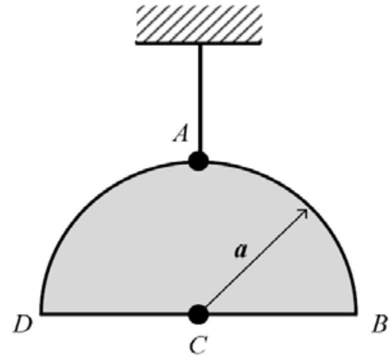
Sendo Q o calor fornecido ao gás nessa transformação, e c o calor específico sensível correspondente, temos:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot (T - T_0) = m \cdot c \cdot \left(\frac{x}{x_0} \cdot \frac{h}{h_0} \cdot T_0 - T_0\right) \Leftrightarrow$$

$$Q = \frac{m \cdot c \cdot T_0}{x_0 \cdot h_0} \cdot (x \cdot h - x_0 \cdot h_0)$$

Tal expressão para o calor Q vem a ser uma função do primeiro grau na variável $x \cdot h$.

QUESTÃO 26



A figura acima representa uma lâmina de espessura e densidade constantes na forma de um semicírculo de raio a. A lâmina está suspensa por um fio no ponto A e o seu centro de massa está a uma distância de $\frac{4a}{3\pi}$ da reta que contém o segmento DB. Uma das metades da lâminas é retirada após um corte feito ao longo do segmento AC. Para a metade que permanece suspensa pelo ponto A nessa nova situação de equilíbrio, a tangente do ângulo que a direção do segmento de reta AC passa a fazer com a vertical é

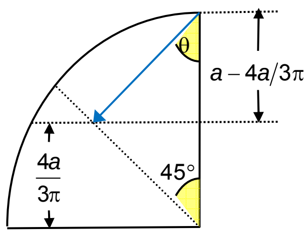
a) $\frac{3}{4\pi - 3}$ **b)** $\frac{4\pi}{3\pi - 4}$ **c)** $\frac{\pi}{\pi - 3}$
d) $\frac{4}{3\pi - 4}$ **e)** $\frac{4}{4 - \pi}$

Resolução **Alternativa D**

Quando seccionarmos o corpo cada uma de suas metades terá, por simetria, centro de massa também situado a uma altura $4a/3\pi$ do segmento de reta que define sua base.

Sabemos ainda que, pela simetria da metade escolhida, seu centro de massa estará situado sobre o eixo que a divide ao meio, representado na figura a seguir como a reta tracejada inclinada de 45°.

Quando suspendermos o corpo pela sua extremidade superior o centro de massa estará na vertical sob o ponto de apoio, representada na figura pela seta.



O ângulo θ será, por tanto, o ângulo que a direção do segmento de reta AC passa a fazer com a vertical.

A tangente de θ é dada por:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{4a/3\pi}{a - 4a/3\pi} \Rightarrow$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{4}{3\pi - 4}$$

QUESTÃO 27

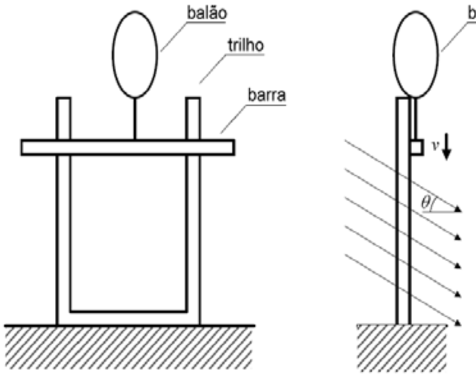


Figura 1 Figura 2

A Figura 1 apresenta um sistema composto por um trilho fixo em U e uma barra móvel que se desloca na vertical com velocidade *v* suspensa por um balão de massa desprezível. O trilho e a barra são condutores elétricos e permanecem sempre em contato sem atrito. Este conjunto está em uma região sujeita a uma densidade de fluxo magnético $\vec{B}$ que forma com a horizontal um ângulo θ, como ilustrado na Figura 2.

Diante do exposto, o valor da corrente induzida no sistema, em ampères, no estado estacionário é:

Dados:

- massa da barra: 1 kg
- aceleração da gravidade g: 10 m/s²
- ângulo θ entre a horizontal e o vetor B: 60º
- massa específica do ar: 1,2 kg/m³
- volume constante do balão: 0,5 m³
- comprimento da barra entre os trilhos: 0,2 m
- densidade de fluxo magnético B: 4 T

Observação:

- despreze a massa do balão com o hélio e o atrito entre a barra e os trilhos.

a) 5,7 **b)** 10,0 **c)** 23,0
d) 30,0 **e)** 40,0

Resolução — Alternativa B

Vejamos as forças agindo sobre a barra.

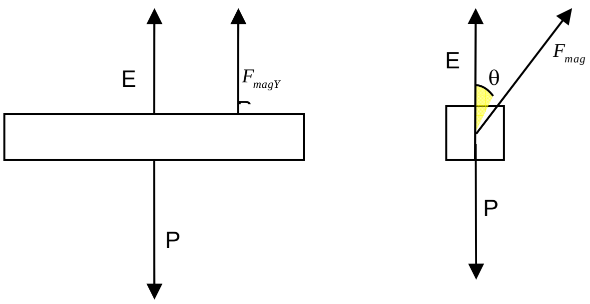


Figura 1 Figura 2

A figura 1 nos mostra as três forças, ou componentes de forças, que atuam no corpo na direção vertical. São elas: o peso da barra *P*, o empuxo do balão *E*, e a componente vertical da força magnética F_{magY}.

Na figura 2 é possível perceber que a componente vertical da força magnética, força essa que é perpendicular à barra por onde passa uma corrente *i* e perpendicular também ao campo magnético externo, tem seu valor dado por $F_{magY} = F_{mag} \cdot \cos(\theta)$.

Assim sendo, a somatória de foças verticais pode ser escrita de forma que:

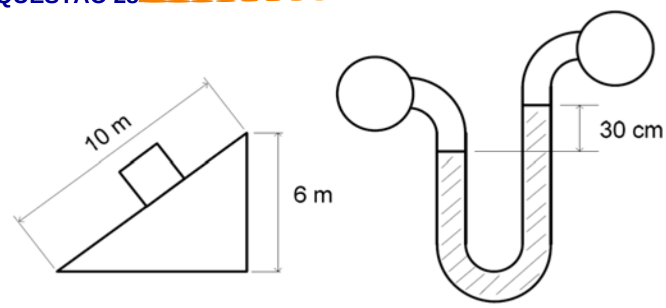
$$P - E - F_{MagY} = 0 \Rightarrow$$

$$mg - \rho g V - B \cdot i \cdot L \cdot \cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$1 \cdot 10 - 1{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot i \cdot 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$4 = 0{,}4 \cdot i \Rightarrow i = 10 \text{ A}$$

QUESTÃO 28



Em um laboratório localizado em um planeta desconhecido, um grupo de pesquisadores observa o deslizamento de um bloco em um plano inclinado. Nota-se que o bloco parte do repouso e atinge o final da rampa em 10 segundos e com velocidade de 4 m/s. Neste mesmo ambiente, encontra-se instalado um manômetro do tipo "tubo em U" que tem por objetivo medir o diferencial de pressão entre dois reservatórios que se localizam em cada ponta do tubo. Sabe-se que o fluido manométrico é feito através da mistura da mesma quantidade em massa de dois óleos miscíveis distintos. Levando em conta os dados abaixo, pode-se afirmar que o coeficiente de atrito (dinâmico) entre o bloco e o plano inclinado na situação física descrita é:

Dados:

- Altura máxima do plano em relação à horizontal: 6 m;
- Comprimento da rampa: 10 m;
- Diferença entre as pressões nos reservatórios: 0,18 kPa;
- Cota de desnível do fluido manométrico: 30 cm;
- Massas específicas dos óleos: 0,3 g/cm³, 0,9 g/cm³.

Observação:

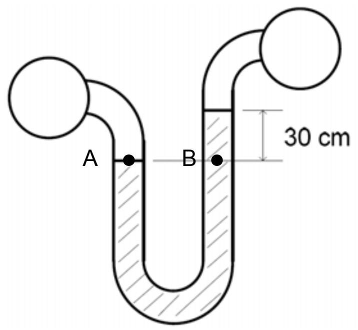
- Considere que a massa, em kg, da mistura dos óleos é igual a soma das massas, em kg, das massas de cada óleo.

a) 0,25
b) 0,45
c) 0,50
d) 0,70
e) 0,75

Resolução — Sem alternativa

Para o tubo em U, a pressão nos dois pontos indicados abaixo são iguais. Sendo p_1 a pressão do gás no bulbo da esquerda e p_2 a do gás à direita e $p_1 - p_2 = 180$ Pa, por Stevin, temos:

$$p_A = p_B$$



Desenvolvendo esta equação:

$$p_1 = p_2 + \rho g h \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g h \Rightarrow$$

$$180 = \rho \cdot g \cdot 0{,}3 \Rightarrow$$

$$\rho g = 600$$

Vamos encontrar a densidade ρ da mistura dos dois óleos:

$$\rho = \frac{m_{Total}}{V_{Total}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/\rho_1 + m_2/\rho_2}$$

Aqui, o volume total é a soma dos volumes dos líquidos miscíveis porque estamos misturando óleos que podemos assumir que tenham propriedades semelhantes. Assim, sendo $m_1 = m_2 = m$:

$$\rho = \frac{m + m}{m/\rho_1 + m/\rho_2} = \frac{2}{\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2}} \Rightarrow \rho = 2\frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Substituindo os dados:

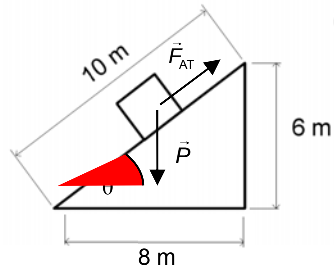
$$\rho = 2\frac{0{,}3\cdot 0{,}9}{1{,}2} \Rightarrow \rho = 0{,}45\ \text{g/cm}^3 \Rightarrow \rho = 450\ \text{kg/m}^3$$

Deste resultado e da relação $\rho g = 600$ encontrada acima, temos:

$$450g = 600 \Rightarrow \boxed{g = \frac{4}{3}\ \text{m/s}^2}$$

Agora, com base nos dados do enunciado, poderíamos pensar em resolver o problema através do estudo das forças que agem sobre o corpo ou pelo estudo da energia. Entretanto, como não foi dito que o bloco foi solto do ponto mais alto do plano inclinado, não podemos resolver o problema pelo estudo das energias envolvidas.

Para o plano inclinado, a resultante das forças é ao longo do plano inclinado e para baixo, ou seja:



$$P\,\text{sen}\,\theta - F_{AT} = ma \Rightarrow \cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta - \mu\cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}a \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}(0{,}6 - \mu\cdot 0{,}8) = a \Rightarrow \mu = \frac{1}{16}(12 - 15a)$$

A aceleração pode ser encontrada pela equação horária da velocidade:

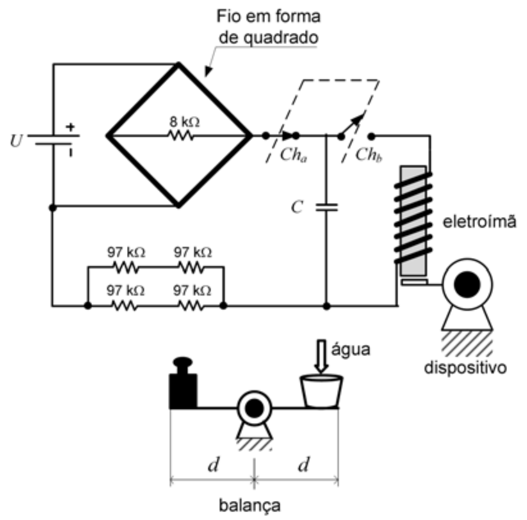
$$v = v_0 + at \Rightarrow 4 = a\cdot 10 \Rightarrow a = 0{,}4\ \text{m/s}$$

Logo, podemos obter o coeficiente de atrito:

$$\mu = \frac{1}{16}(12 - 15a) \Rightarrow \mu = \frac{6}{16} \Rightarrow \boxed{\mu = 0{,}375}$$

Não há alternativa que satisfaça este resultado.

QUESTÃO 29



A figura acima apresenta um circuito elétrico e um sistema de balança. O circuito é composto por uma Fonte em U, cinco resistores, um capacitor, um quadrado formado por um fio homogêneo, duas chaves e um eletroímã interligados por fios de resistência desprezível. O sistema de balança é composto por um bloco e um balde de massa desprezível que está sendo preenchido por água através de um dispositivo. Sabe-se que, imediatamente após o carregamento do capacitor, a chave Ch_a se abrirá e a chave Ch_b se fechará, fazendo com que o capacitor alimente o eletroímã, de modo que este acione um dispositivo que interromperá o fluxo de água para o balde. O valor do capacitor para que o sistema balde e bloco fique em equilíbrio e a energia dissipada no fio a partir do momento em que o capacitor esteja completamente carregado até o vigésimo segundo são, respectivamente

Dados:

- U = 100V;
- resistência total do fio: 32kΩ;
- fluxo de água: 200 mL/s;
- massa específica da água = 1g/cm³;
- massa do bloco: 0,8 kg.

Observações:

- despreze a massa do balde;
- considere o capacitor carregado em um tempo correspondente a cinco vezes a constante de tempo.

a) 6 μF e 10 J **b)** 8 μF e 10 J **c)** 8 μF e 20 J
d) 10 μF e 10 J **e)** 10 μF e 20 J

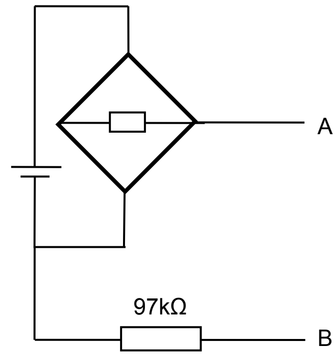
Resolução **Alternativa C**

Da simetria da balança podemos afirmar que a massa de água necessária para equilibrar o bloco deve ser 0,8kg, que corresponde a 800mL de água. Como o fluxo de água para o balde é 200 mL/s, então o tempo que o capacitor deve demorar para carregar será de 4 s.

A questão nos diz para considerar que o tempo de carga é 5 vezes maior do que a constante de tempo, esta constante é dada por

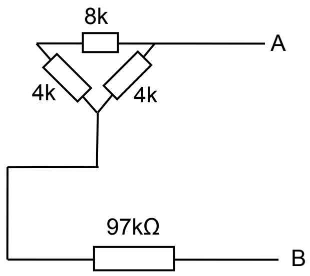
$$\tau \equiv R\cdot C$$
$$5\cdot R\cdot C = 4\ \ \text{(I)}$$

Observemos inicialmente que o fio em forma de quadrado forma uma ponte de Wheatstone, sendo que cada lado do quadrado apresenta uma resistência de $8k\Omega$. Desse modo a ponte pode ser representada por duas resistências de $4k\Omega$, conforme ilustra a figura. Vamos encontrar a resistência equivalente de Thevenin do circuito equivalente entre os terminais A e B, do capacitor.



Para isso curto circuitamos a fonte e calculamos a resistência equivalente entre os terminais A e B, portanto:
(note que cada lado do quadrado possui uma resistência de $8\,\text{k}\Omega$)

Redesenhando o circuito obtemos:



$$R = 97000 + \left[\frac{(4+8)\cdot 4}{4+8+4}\cdot 10^3\right] = 100\cdot 10^3\ \Omega$$

Substituindo esse resultado em (I)

$$5\cdot 100\cdot 10^3\cdot C = 4 \Rightarrow C = 8\ \mu\text{C}$$

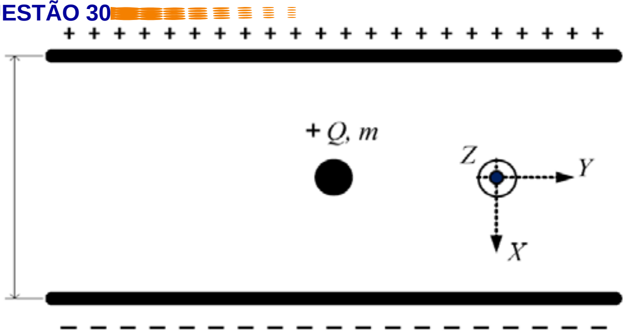
Após o capacitor ter sido carregado por completo a potência dissipada pelo fio é

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{100^2(V^2)}{8k\Omega} = 1{,}25\ \text{W}$$

Como queremos a energia dissipada até o vigésimo segundo de funcionamento do circuito e o capacitor gasta 4 segundos para se carregar, então a energia dissipada será

$$E = 1{,}25\cdot(20 - 4) = 20\ \text{J}$$

QUESTÃO 30



Um capacitor de placas paralelas carregado gera um campo elétrico constante em seu interior. Num instante inicial, uma partícula de massa *m* e carga +*Q*, localizada no interior do capacitor, é liberada com velocidade nula. Neste mesmo instante, o capacitor começa a girar com velocidade angular constante ω em torno do eixo *z*. Enquanto estiver no interior do capacitor e antes de colidir com uma das placas, a trajetória da carga será uma:

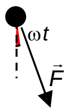
Observação:

- Desconsidere as ações dos campos magnético e gravitacional.

a) superposição de um movimento circular uniforme com um movimento uniforme no eixo Y.
b) superposição de um movimento circular uniforme com um movimento uniforme no eixo X.
c) elipse, não se constituindo uma circunferência.
d) circunferência.
e) parábola.

Resolução **Alternativa A**

Vamos supor que o capacitor gire no sentido anti-horário.



Pela figura acima, podemos decompor a força nas direções x e y, de acordo com o esquema da figura dada no enunciado:

$$\begin{cases} F_x = QE\cos(\omega t) = ma_x \\ F_y = QE\,\text{sen}(\omega t) = ma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{QE}{m}\cos(\omega t) \\ a_y = \dfrac{QE}{m}\text{sen}(\omega t) \end{cases}$$

Integrando estas duas equações podemos obter as equações para as componentes da velocidade:

$$\begin{cases} v_x = \int a_x dt \\ v_y = \int a_y dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{QE}{m\omega}\text{sen}(\omega t) + c_x \\ v_y = -\dfrac{QE}{m\omega}\cos(\omega t) + c_y \end{cases}$$

As constantes c_x e c_y surgem porque, para a condição inicial, a velocidade é nula. Assim, fazemos v_x e v_y nulas para $t = 0$:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{QE}{m\omega}\text{sen}(0) + c_x \\ 0 = -\dfrac{QE}{m\omega}\cos(0) + c_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 + c_x \\ 0 = -\dfrac{QE}{m\omega}\cdot 1 + c_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_x = 0 \\ c_y = \dfrac{QE}{m\omega} \end{cases}$$

Logo, a solução para as velocidades será:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{QE}{m\omega}\text{sen}(\omega t) \\ v_y = -\dfrac{QE}{m\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{QE}{m\omega} \end{cases}$$

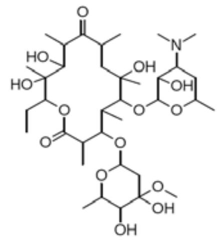
Observe que isto equivale à composição de movimento de um movimento circular uniforme (termos que dependem de seno e cosseno) com um movimento retilíneo e uniforme de velocidade constante $\dfrac{QE}{m\omega}$.

Este movimento é o mesmo de um ponto fixo a uma roda que gira com velocidade angular constante ω e translada com velocidade constante na horizontal. A trajetória desse ponto é uma cicloide, logo a resposta correta é a alternativa A.

QUÍMICA

QUESTÃO 31

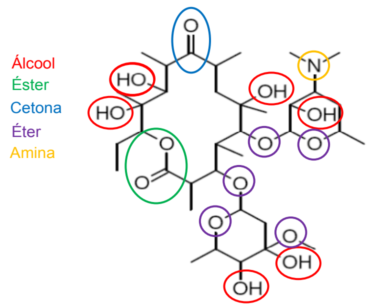
A eritromicina é uma substância antibacteriana do grupo dos macrolídeos muito utilizada no tratamento de diversas infecções. Dada a estrutura da eritromicina abaixo, assinale a alternativa que corresponde às funções orgânicas presentes.



a) Álcool, nitrila, amida, ácido carboxílico.
b) Álcool, cetona, éter, aldeído, amina.
c) Amina, éter, éster, ácido carboxílico, álcool.
d) Éter, éster, cetona, amina, álcool.
e) Aldeído, éster, cetona, amida, éter.

Resolução **Alternativa D**

As funções orgânicas encontradas na eritromicina são:



QUESTÃO 32

Um volume V_1 de uma solução aquosa de $HC\ell$ 6mol/L contém inicialmente uma massa m_0 de íons Fe^{+3}. São realizadas n extrações utilizando, em cada uma delas, o mesmo volume V_2 de éter etílico, o qual é um solvente seletivo para $FeC\ell_3$. Sabendo que o coeficiente de partição do ferro entre o éter e a solução aquosa de $HC\ell$ vale K, qual das expressões abaixo é equivalente à massa de íons Fe^{+3} remanescente na fase aquosa ao final do processo? Suponha que a extração do soluto não altera o volume da solução de $HC\ell$.

a) $m_o\left(\dfrac{6KV_1}{KV_2+V_1}\right)^n$

b) $m_o\left(\dfrac{KV_1}{V_2+KV_1}\right)^n$

c) $m_o\left(\dfrac{6KV_1}{V_2+V_1}\right)^n$

d) $m_o\left(\dfrac{V_1}{V_2+6KV_1}\right)^n$

e) $m_o\left(\dfrac{V_1}{KV_2+V_1}\right)^n$

Resolução **Alternativa E**

O coeficiente de partição K é uma constante análoga à constante de equilíbrio e relaciona as concentrações após cada extração.

$$k = \frac{[Fe^{3+}]_{éter}}{[Fe^{3+}]_{H_2O}} \qquad (1)$$

onde: $[Fe^{3+}]_{éter}$ é a concentração de ferro no éter e $[Fe^{3+}]_{H_2O}$ é a concentração de ferro na solução aquosa de $HC\ell$.

Como as concentrações do numerador e do denominador da equação (1) são da mesma espécie química, então, as massas

transferidas são diretamente proporcionais ao número de mols e podemos utilizar diretamente as massas no estudo do processo químico.
Inicialmente toda a massa de ferro está na solução aquosa. Após cada extração, parte dessa massa migra para a fase etérea.

	$Fe^{3+}_{H_2O}$	$Fe^{3+}_{éter}$
Início	m_0	0
Transferência de fase	$-x$	$+x$
Situação final	$m_0 - x$	$+x$

Na situação final temos:

$$[Fe^{3+}]_{H_2O} = \frac{m_0 - x}{V_1}$$

$$[Fe^{3+}]_{éter} = \frac{x}{V_2}$$

Podemos dizer que: $x = m_0 - m_f$

Então:

$$[Fe^{3+}]_{H_2O} = \frac{m_f}{V_1}$$

$$[Fe^{3+}]_{éter} = \frac{m_0 - m_f}{V_2}$$

Substituindo em I:

$$k = \frac{\dfrac{m_0 - m_f}{V_2}}{\dfrac{m_f}{V_1}} = \frac{(m_0 - m_f)V_1}{V_2 m_f} \Rightarrow$$

$$kV_2 m_f = m_0 V_1 - m_f V_1 \Rightarrow m_f(kV_2 + V_1) = m_0 V_1 \Rightarrow$$

$$m_f = \frac{m_0 V_1}{KV_2 + V_1}$$

Se fizermos *n* extrações:

$$\therefore m_f = m_0\left(\frac{V_1}{KV_2 + V_1}\right)^n$$

QUESTÃO 33

Um pesquisador verificou, em uma determinada posição geográfica, por meio de análise de amostras de água do mar extraídas do local, que a massa específica média da água do mar era 1,05 g/mL, a concentração média de espécies dissolvidas era 0,80 mol/L e a temperatura média era de 290 K. O mesmo pesquisador, com o objetivo de colher água doce em seu estudo, planeja envolver, com uma membrana semipermeável ideal, uma das extremidades abertas de um longo tubo, a qual será imersa na água do mar. A que profundidade mínima, em metros, o tubo deveria ser imerso?

a) 1930,0. **b)** 183,4. **c)** 73,7.
d) 19,4. **e)** 9,7.

Dados:

$$R = 0{,}08\frac{atm \cdot L}{K \cdot mol} = 8{,}3\frac{J}{K \cdot mol} = 62{,}3\frac{mmHg \cdot L}{K \cdot mol}$$

$$g = 10{,}0\frac{m}{s^2}$$

Resolução **Alternativa B**

A pressão do líquido (P_L) deverá ser igual à pressão osmótica (π). Sendo $\pi = MRT$, em que M = concentração de espécies em mol/m^3, $R = 8{,}3$ J/mol·K e T a temperatura em Kelvin.

Transformando a unidade da concentração, temos: $0{,}8$ mol/L x 10^3 = $0{,}8 \cdot 10^3$ mol/m^3.

Substituindo:

$$\pi = MRT \rightarrow \pi = 0{,}8 \cdot 10^3 \cdot 8{,}3 \cdot 290 = 19{,}256 \cdot 10^5 Pa$$

A pressão do líquido (P_L) é dada por: $P_L = d \cdot h \cdot g$ em Pa, em que *d* é a densidade do líquido em kg/m^3, *g* é a aceleração da gravidade em m/s^2 e *h* a altura da coluna do líquido em m.

Transformando a unidade da densidade, temos: $d = 1{,}05$ g/mL x $10^3 = 1{,}05 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Substituindo:

$$P_L = d \cdot h \cdot g \rightarrow 19{,}256 \cdot 10^5 = 1{,}05 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot h \rightarrow h = 183{,}39\ m$$

QUESTÃO 34

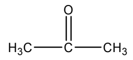
Considere os compostos abaixo enumerados.
I. Acetona; IV. Etanamida;
II. Neopentano; V. Pentano.
III. Fluoreto de lítio;

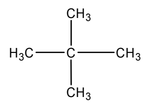
Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta, conforme a ordem crescente de ponto de ebulição.

a) III, I, IV, II, V. **b)** V, II, I, IV, III. **c)** II, V, I, IV, III.
d) II, V, IV, I, III. **e)** V, II, III, IV, I.

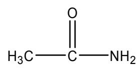
Resolução **Alternativa C**

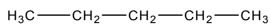
Considerando as fórmulas estruturais dos compostos, temos:

I. 

II. 

III. LiF

IV. 

V. 

Os menores pontos de ebulição serão dos compostos apolares que têm interações intermoleculares fracas do tipo dipolo instantâneo-dipolo induzido: II e V. Como o II é ramificado, seu ponto de ebulição é menor que o do V já que a área de contato menor faz com que as interações intermoleculares sejam mais fracas.
Depois, temos o composto polar que faz interações intermoleculares do tipo dipolo-dipolo: I. Em seguida, o composto polar que faz interações intermoleculares do tipo Ligação de Hidrogênio: IV.
O de maior ponto de ebulição é do III por ser iônico.
Assim, a ordem crescente é: **II < V < I < IV < III**.

QUESTÃO 35

Dados os elementos abaixo,

$$^{35}_{17}\Phi;\ ^{40}_{20}\Psi;\ e\ ^{107}_{47}\Omega$$

marque a alternativa correta, considerando-se as condições de 1 *atm* e 25ºC.

a) Φ é encontrado livre na natureza na forma de gás monoatômico.
b) Φ combina-se com Ψ formando um composto solúvel em água.
c) Φ combina-se com Ω formando um composto solúvel em água.
d) Ψ combina-se com Ω formando um composto gasoso.
e) Ω é um mau condutor de eletricidade.

Resolução **Alternativa: B**

Os elementos citados na questão, respectivamente, são: cloro (Φ), cálcio (Ψ) e prata (Ω).

a) Falsa. O cloro está presente na natureza na forma de Cl_2 (diatômico) e nas condições ambientes se encontra no estado gasoso.
b) Correta. Os elementos cálcio e cloro se combinam para formar um composto iônico e solúvel em água.
c) Falsa. A combinação de prata e cloro forma o composto cloreto de prata, o qual é insolúvel em água.
d) Falsa. Não ocorre a combinação entre cálcio e prata.
e) Falsa. A prata é um metal e então apresenta condutividade elétrica.

QUESTÃO 36

Uma certa reação química a pressão e temperatura constantes apresenta uma pequena variação da Energia Livre (ΔG), de valor próximo de zero, uma variação positiva da entropia (ΔS) e uma variação negativa da entalpia (ΔH). Considerando-se apenas estes dados, pode-se afirmar que a reação

a) é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta G / \Delta H$ e ela nunca atinge o equilíbrio.
b) não é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta H / \Delta S$ e não há variação na composição do meio racional.
c) não é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta G / \Delta H$ e há uma pequena variação na composição do meio.
d) é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta H / \Delta S$ e há variação na composição do meio racional.
e) é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta G / \Delta H$ e o equilíbrio é atingido.

Resolução — Sem resposta

Sabemos que a energia livre de Gibbs é dada por $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$. E, uma vez que a temperatura é absoluta, ela somente assume valores positivos. Além disso, de acordo com o enunciado, o $\Delta H < 0$, e $\Delta S > 0$, portanto

$$\Delta G = \underbrace{\Delta H}_{<0} - \underbrace{T \cdot \Delta S}_{>0} \Rightarrow \Delta G < 0 \quad (1)$$

Uma vez que $\Delta G < 0$, podemos concluir que a reação ***é espontânea.*** Além disso, considerando a equação da energia livre de Gibbs:

$$\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S \Rightarrow T = \frac{\Delta H - \Delta G}{\Delta S} \qquad (2)$$

Analisando a equação (1) e considerando que $\Delta G \approx 0$, temos que $\Delta H \approx 0$ e $-T \cdot \Delta S \approx 0$, pois, considerando que as duas parcelas possuem o mesmo sinal, a única maneira de termos $\Delta G \approx 0$ é as duas parcelas, em módulo, serem menores do que $|\Delta G|$, sendo assim, não há alternativa correta, pois não é possível anular nenhuma das parcelas do numerador da equação (2), de modo a chegarmos às equações das alternativas.

Considerando a afirmação do enunciado, de que $\Delta G \approx 0$, acreditamos que o examinador esperava que ΔG fosse anulado na equação (2), entretanto, se assumirmos $\Delta G = 0$ chegamos a um resultado absurdo:

$$T = \frac{\Delta H - \cancel{\Delta G}}{\Delta S} = \frac{\Delta H}{\Delta S} < 0$$

No entanto, sendo T a temperatura absoluta, ela nunca pode assumir valores negativos.

QUESTÃO 37

Um isótopo radioativo X transforma-se em um elemento estável Y após reações de desintegração radioativa com emissão de radiação α, radiação β negativa e radiação γ. Assinale a alternativa correta:

a) A diferença entre os números de massa de X e de Y será igual à diferença entre o dobro do número de partículas α emitidas e o número de partículas β emitidas.
b) A emissão da radiação γ altera o número atômico de X.
c) A diferença entre os números atômicos de X e Y será igual ao quádruplo do número de partículas α emitidas.
d) X e Y são isótonos.
e) A diferença entre os números de nêutrons de X e Y será igual à soma do dobro do número de partículas α emitidas com o número de partículas β emitidas.

Resolução — Alternativa E

A desintegração pode ser escrita como:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow \, ^{A-4n}_{Z-2n+p}Y + n \, ^{4}_{2}\alpha + p \, ^{0}_{-1}\beta + \, ^{0}_{0}\gamma$$

Em que o número atômico de Y é dado por $Z-(2n-p) = Z-2n+p$ e o número de massa $A-4n+0p = A-4n$.

a)Falsa. A diferença entre os números de massa de Y e X é dada por: $A-4n-A = 4n$. A diferença entre o dobro de partículas α (2n) e o número de partículas β (p) é igual a $2n-p$.

b) Falsa. A emissão γ não altera o número atômico e nem o número de massa pois trata-se de uma onda.

c) Falsa. A diferença entre os números atômicos de X e Y é dada por: $Z-(Z-2n+p) = 2n-p$. O quádruplo do número de partículas α é $4n$.

d)Falsa. O número de nêutrons de X é $A-Z$ e o número de nêutrons de Y é $A-4n-(Z-2n+p) = A-Z-2n-p$.

e)Correta. O número de nêutrons de X e Y foi determinado no item anterior. A diferença entre o número de nêutrons é $A-Z-(A-Z-2n-p) = 2n+p$. O dobro do número de partículas α (2n) somado com o número de partículas β (p) é igual a $2n+p$.

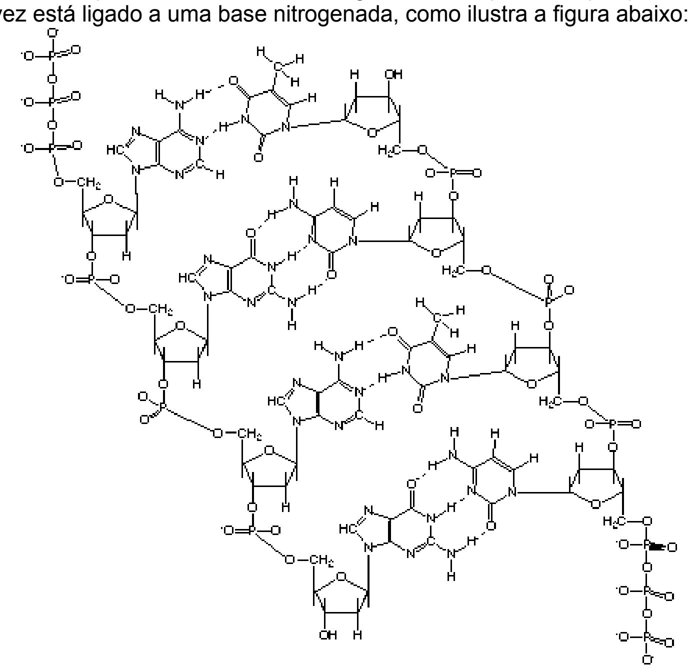
QUESTÃO 38

Assinale a alternativa correta:

a) A hidrólise total de um nucleotídeo resulta em uma base nitrogenada heterocíclica, um monossacarídeo e um íon fosfato.
b) As bases nitrogenadas encontradas nos nucleotídeos do DNA são: adenina, uracila, citosina e guanina.
c) Watson e Crick descobriram que o RNA possui uma estrutura de dupla hélice, estando as hélices ligadas entre si por ligações de hidrogênio entre pares de bases nitrogenadas.
d) O pareamento de bases nitrogenadas em um ácido nucleico é específico: uma adenina se liga somente a outra adenina, um citosina somente a outra citosina e assim por diante.
e) A replicação do RNA é a responsável pela transmissão do código genético.

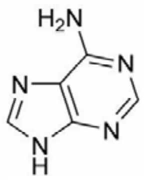
Resolução — Alternativa A

a) Correta. Um nucleotídeo pode ser um DNA ou RNA. Ambos são formados por uma fita de fosfato ligado a uma pentose que por sua vez está ligado a uma base nitrogenada, como ilustra a figura abaixo:

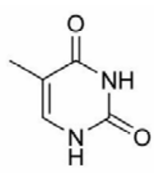


Representação de um fragmento de DNA (Lehninger, Principles of Biochemistry).

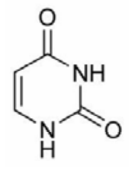
Uma reação de hidrólise rompe a ligação dos fosfatos com o açúcar e deste com a base nitrogenada. Os produtos de hidrólise são portanto ânions fosfatos, pentoses e bases nitrogenadas. Todas as bases nitrogenadas são heterocíclicas:



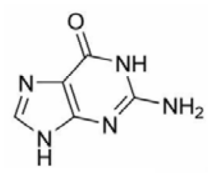
adenina



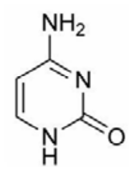
timina



uracila



guanina

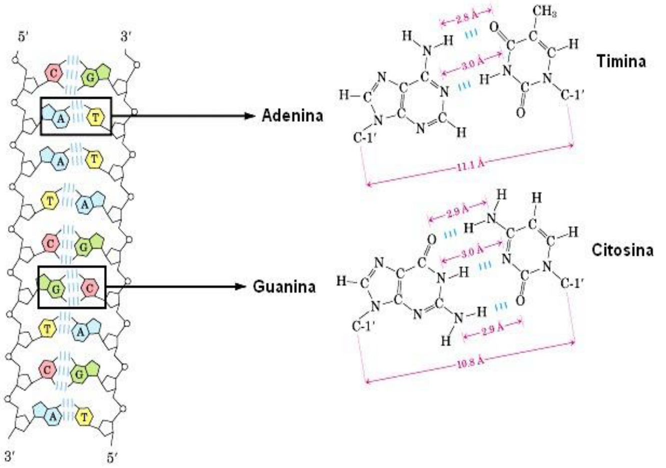


citosina

b) Falsa. As bases nitrogenadas encontradas no DNA são as purinas adenina e guanina e pirimídicas são citosina e timina. A uracila ocorre somente em RNA.

c) Falsa. O RNA apresenta uma fita simples. Em 1953, J.D Watson e F.H.C Crick propuseram a estrutura do DNA, que apresenta dois filamentos paralelos de nucleotídeos enrolados um em torno do outro, formando a dupla hélice.

d)Falsa. Para o DNA o pareamento ocorre entre adenina e timina através de duas ligações de hidrogênio e citosina com guanina, que apresenta três ligações de hidrogênio.

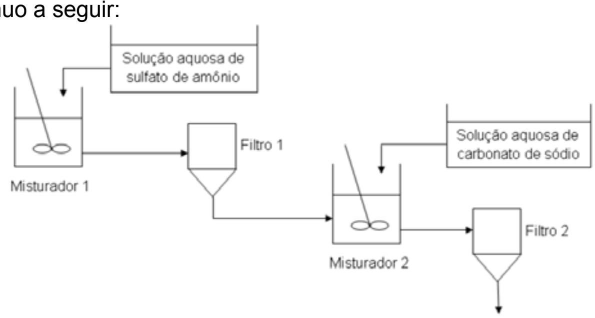


Emparelhamento das bases nitrogenadas (Lehninger, Principles of Biochemistry)

e)Falsa. A replicação do DNA é a responsável pela transferência genética. O RNA é responsável pela síntese proteica.

QUESTÃO 39

Considere as etapas sequenciais de mistura/filtração do processo não contínuo a seguir:



No Misturador 1, antes da adição de 100 mL de uma solução aquosa de sulfato de amônio 20 g/L, encontram-se 100 mL de uma solução aquosa composta por massas iguais de nitrato de prata, nitrato cúprico e nitrato de chumbo (II), de concentração total 60 g/L.

Ao Misturador 2, que contém o material passante do Filtro 1, adicionam-se 100 mL de uma solução aquosa de carbonato de sódio 40 g/L e uma pequena quantidade de uma solução de hidróxido de sódio objetivando o adequado ajuste do pH de precipitação para, em seguida, proceder a filtração. Sobre os produtos de filtração, pode se dizer que:

a) o precipitado retido no Filtro 2 é uma mistura heterogênea.

b) o precipitado retido no Filtro 1, conhecido como galena, é um sólido iônico resultante da reação:

$$Pb(NO_3)_{2(aq)} + (NH_4)_2S_{(aq)} \rightleftharpoons PbS_{(s)} + 2NH_4NO_{3(aq)}$$

c) no misturador 2 observam-se os seguintes equilíbrios iônicos:

$$2Ag^+_{(aq)} + CO_3^{-2}{}_{(aq)} \rightleftharpoons Ag_2CO_{3(s)}$$

$$2Cu^+_{(aq)} + CO_3^{-2}{}_{(aq)} \rightleftharpoons Cu_2CO_{3(s)}$$

d) o chumbo no estado sólido pode ser obtido espontaneamente através do sólido retido no Filtro 1, conforme a reação comum às baterias de chumbo:

$$2PbSO_{4(s)} + 2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons PbO_2 + Pb_{(s)} + 2SO_4^{2-}{}_{(aq)} + 4H^+_{(aq)}$$

e) o precipitado retido no Filtro 2 é um sólido molecular, metaestável, com baixo ponto de fusão e com excelente propriedades de condução térmica e elétrica.

Resolução **Alternativa: A**

a) Correta. As reações entre nitrato cúprico e nitrato de prata com carbonato de sódio estão representadas a seguir:

$$Cu(NO_3)_{2(aq)} + Na_2CO_{3(aq)} \rightarrow CuCO_{3(s)} + 2\ NaNO_{3(aq)}$$

$$2AgNO_{3(aq)} + Na_2CO_{3(aq)} \rightarrow Ag_2CO_{3(s)} + 2\ NaNO_{3(aq)}$$

Dessa forma, concluímos que ocorre a formação de dois precipitados constituindo um sistema heterogêneo.

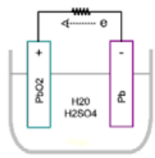
Os íons chumbo formam precipitados na etapa anterior na forma de $PbSO_4$.

b) Falsa. O precipitado retido no filtro 1 é o sulfato de chumbo II como mostra a equação a seguir:

$$(NH_4)_2SO_{4(aq)} + Pb(NO_3)_{2(aq)} \rightarrow PbSO_{4(s)} + NH_4NO_{3(aq)}$$

c) Falsa. O precipitado formado no misturador 2 é o carbonato de cobre II ou carbonato cúprico, e não o citado no item, o carbonato cuproso.

d) Falsa. A bateria de chumbo apresenta o seguinte desenho:



Formada pelas seguintes semirreações:

Ânodo: $Pb_{(s)} + SO_4^{2-}{}_{(aq)} \rightarrow PbSO_{4(s)} + 2\ e^-$

Cátodo: $PbO_{2(s)} + SO_4^{2-}{}_{(aq)} + 4H^+ + 2e^- \rightarrow PbSO_{4(s)} + 2H_2O_{(l)}$

A reação global obtida a partir da bateria de chumbo é a seguinte:

$$Pb_{(s)} + PbO_{2(s)} + 2\ H_2SO_{4(aq)} \rightarrow 2PbSO_{4(s)} + 2H_2O_{(l)}$$

e) Falsa. Os precipitados formados no filtro 2 são $CuCO_3$ e Ag_2CO_3 , sólidos iônicos que apresentam alto ponto de fusão e baixa condutividade elétrica e térmica.

QUESTÃO 40

Considere a rota sintética descrita na sequência abaixo onde cada etapa ocorre em temperatura e pressão adequadas:

1ª Etapa: o composto **A** (C_7H_6O) sofre oxidação em solução básica de permanganato de potássio. O produto gerado, após neutralizado, é o ácido benzoico;

2ª Etapa: o ácido benzoico reage com etanol em solução ácida, produzindo o composto **B** e água;

3ª Etapa: o composto **B** sofre forte redução com hidreto de lítio-alumínio em éter, gerando dois produtos que, depois de neutralizados, formam então o composto **C** e o etanol.

Considerando as etapas supracitadas, são feitas as seguintes afirmações:

I) o composto **A** e o composto **C** são isômeros.
II) o composto **B** é uméster.
III) o composto **B** é o acetato de benzila.

Com base na análise das afirmações acima, assinale a opção correta.

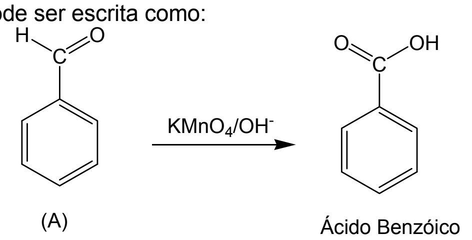
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
c) Existe apenas uma afirmação verdadeira.
d) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

Resolução **Alternativa C**

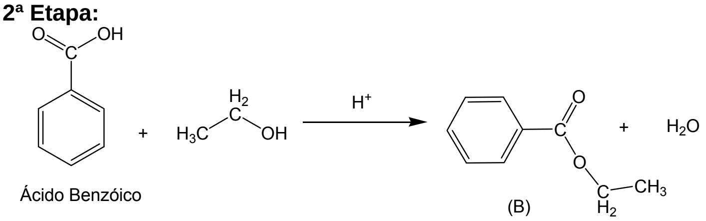
1ª Etapa:

O permanganato pode oxidar tanto um álcool quanto um aldeído à ácido carboxílico. Pela fórmula molecular (C_7H_6O), podemos afirmar

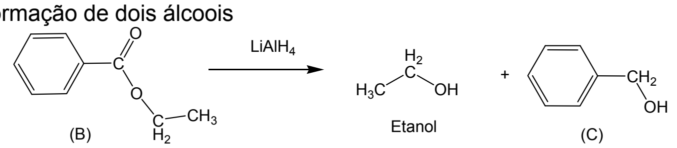
que se trata do benzaldeído, pois o álcool benzílico tem fórmula molecular (C_7H_8O).
A reação pode ser escrita como:



2ª Etapa:

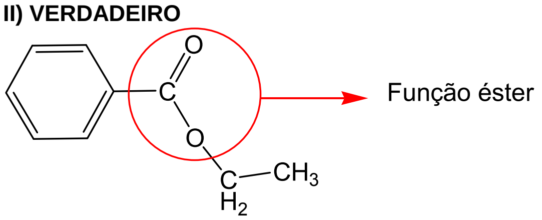


3ª Etapa: A redução de um éster com hidreto de lítio-alumínio leva a formação de dois álcoois



A partir dessas reações, podemos julgar as afirmações:

I) FALSO. O Composto A possui fórmula molecular (C_7H_6O) já o composto C possui fórmula molecular (C_7H_8O), portanto **não** são isômeros.
II) VERDADEIRO



III) Falso. O composto B é o Benzoato de etila.

Equipe desta resolução

Física
Danilo José de Lima
Luiz Salles de Carvalho
Michel Benite Rossi

Matemática
Alessandro Fonseca Esteves Coelho
Darcy Gabriel Augusto de Camargo Cunha
Thais de Almeida Guizellini

Química
Jean Carlos Corte Terencio
Roberto Bineli Muterle
Tathiana de Almeida Guizellini

Revisão
Eliel Barbosa da Silva
Fabiano Gonçalves Lopes
Felipe Eboli Sotorilli
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani

Digitação, Diagramação e Publicação
Ana Flávia Pasquotte Vieira
Lucas Rosa